

Matematyka



1. O ROZWIĄZYWANIU NIERÓWNOŚCI KWADRATOWYCH I ZADAŃ TEKSTOWYCH NA EGZAMINIE MATURALNYM Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

Agata Siwik
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży

Zadania w arkuszu do egzaminu maturalnego z poziomu podstawowego w 2013 roku badały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych: wykorzystania i tworzenia informacji, wykorzystania i interpretowania reprezentacji, modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii, rozumowania i argumentacji. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

Rozwiązania zadań przedstawione przez zdających pokazują ogromne zróżnicowanie stopnia opanowania wiadomości i umiejętności matematycznych, które powinien posiadać absolwent szkoły ponadgimnazjalnej.

W arkuszu na poziomie podstawowym wystąpiły zadania sprawdzające umiejętność rozwiązywania nierówności kwadratowej, a także umiejętność rozwiązywania zadania umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego. Umiejętności badania funkcji kwadratowej są bardzo ważne w praktyce szkolnej. Ważne jest badanie funkcji kwadratowej. Przy rozwiązywaniu nierówności kwadratowych zdający muszą się wykazać umiejętnością korzystania z nauczonych wzorów. Zdający muszą te wzory rozumieć. Więcej wyobraźni matematycznej potrzebne jest przy korzystaniu ze wzorów Viète'a. Natomiast równania kwadratowe z parametrem bardzo dobrze sprawdzają zarówno umiejętności rachunkowe ucznia, jak również umiejętność logicznego myślenia.

Przed wielką reformą nauczania matematyki, która miała miejsce we wczesnych latach siedemdziesiątych, omawianie równań i funkcji kwadratowych zajmowało około dwie trzecie czasu poświęconego algebrze w jednej z klas liceum. Wprowadzano najpierw równanie niepełne, potem ogólną postać równania, algorytm rozwiązywania i wzory Viète'a. Rozwiązywano dużo więcej niż obecnie zadań tekstowych i nieskomplikowanych zadań z parametrem. Do równań kwadratowych często nawiązywano potem, przy okazji nauczania trygonometrii i stereometrii. Nierówności kwadratowe omawiano dopiero w kolejnej klasie, przy okazji rozwiązywania równań wielomianowych wyższych stopni. Po reformie nie można już było sobie pozwolić na tak szczegółowe realizowanie

materiału. Ta tendencja się utrzymała: równania kwadratowe są wciśnięte w inne zagadnienia.

Począwszy od maja 2010 roku, w arkuszach egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego, znajdują się min. dwa zadania, które sprawdzają te same umiejętności – rozwiązanie nierówności kwadratowej oraz rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego.

Jakie były wyniki zdający w tych dwóch zadaniach?

Omówmy zatem kolejno wyniki zdających w tych zadaniach.

Nierówność kwadratowa – standard II (Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji)

Przypomnijmy najpierw treści zadań:

Zadanie 26. (maj 2010)
Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$.

Zadanie 24. (maj 2011)
Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Zadanie 26. (maj 2012)
Rozwiąż nierówność $x^2 + 8x + 15 > 0$.

Zadanie 30. (maj 2013)
Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

oraz rozkład wyników uzyskiwanych w poszczególnych latach w przypadku zadania dotyczącego rozwiązywania nierówności kwadratowej:

	Liczba punktów			Łatwość zadania
	0	1	2	
	Procent zdających, którzy uzyskali daną liczbę punktów			
maj 2010 zadanie 26	27,0	27,0	46,0	0,58
maj 2011 zadanie 24	18,1	28,5	53,4	0,67
maj 2012 zadanie 26	15,3	34,9	49,8	0,68
maj 2013 zadanie 30	16,1	29,3	54,7	0,69

Zadanie polegające na rozwiązaniu nierówności kwadratowej (począwszy od maja 2010 do maja 2013) jest dla ogółu zdających umiarkowanie trudne i jest jednocześnie jednym z najłatwiejszych zadań otwartych w zestawie egzaminacyjnym.

W maju 2010 tylko 46% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania.

Część zdających prawidłowo wyznaczała pierwiastki trójmianu kwadratowego, ale błędnie podawała zbiór rozwiązań nierówności, np. wskazując obliczone pierwiastki jako zbiór rozwiązań tej nierówności. Dość często pojawiały się rozwiązania, w których zdający błędnie zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Z roku na rok odnotowujemy rozwiązania, w których zdający popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Za takie rozwiązania zdający mogli otrzymać 1 punkt.

Niestety nadal, po czterech sesjach egzaminacyjnych, grupa około 16% zdających nie otrzymała nawet jednego punktu za rozwiązanie nierówności kwadratowej, mimo iż ten typ zadania pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym.

W sesji maj 2010 oraz w maj 2011 typ nierówności był identyczny. W dwóch kolejnych sesjach (maj 2012 i maj 2013) nierówności kwadratowe różniły się od tych w dwóch poprzednich sesjach znakiem nierówności.

I etap rozwiązania zadania polegał na znalezieniu pierwiastków trójmianu kwadratowego. Pełna odpowiedź polegała na podaniu zbioru rozwiązań w postaci przedziału.

W schemacie oceniania rozwiązań zdających pierwszy punkt egzaminator przyznawał zdającemu wtedy, gdy:

- ✓ zrealizował pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestał lub błędnie zapisał zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczył lub podał pierwiastki trójmianu kwadratowego i na tym poprzestał lub błędnie zapisał zbiór rozwiązań nierówności;
 - zaznaczył na wykresie miejsca zerowe funkcji kwadratowej i na tym poprzestał lub błędnie zapisał zbiór rozwiązań nierówności;
 - rozłożył trójmian kwadratowy na czynniki liniowe i na tym poprzestał lub błędnie rozwiązał nierówność;
 - zapisał nierówność za pomocą wartości bezwzględnej i na tym poprzestał lub błędnie zapisał zbiór rozwiązań nierówności;

albo

- ✓ realizując pierwszy etap, popełnił błąd (ale otrzymał dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiązał nierówność, np.:
 - popełnił błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązał nierówność;
 - błędnie zapisał równania wynikające ze wzorów Viète'a i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązał nierówność;
 - błędnie zapisał nierówność za pomocą wartości bezwzględnej i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązał nierówność.

Drugi punkt egzaminator przyznawał zdającemu wtedy, gdy:

- podał zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- sporządził ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres),

albo

- podał zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie tekstowe – standard III (Modelowanie matematyczne).

Przypomnijmy najpierw treści zadań:

Zadanie 34. (maj 2010)

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2 . Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 32. (maj 2011)

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Zadanie 34. (maj 2012)

Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pośpiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pośpieszny.

Zadanie 34. (maj 2013)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

oraz rozkład wyników uzyskiwanych w poszczególnych latach w przypadku zadania dotyczącego rozwiązywania zadania umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego:

	Liczba punktów						Łatwość zadania
	0	1	2	3	4	5	
	Procent zdających, którzy uzyskali daną liczbę punktów						
maj 2010 zadanie 26	34,9	7,2	15,9	8,4	5,1	28,4	0,44
maj 2011 zadanie 24	42,7	10,6	6,9	6,1	3,7	30,2	0,42
maj 2012 zadanie 26	49,9	2,9	5,2	7,0	5,5	29,6	0,41
maj 2013 zadanie 30	55,4	1,2	3,8	6,3	5,0	27,4	0,38

Łatwość zadania tekstowego polegającego na rozwiązaniu zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego z roku na rok maleje. Rozwiązanie zadania polega na ułożeniu układu równań opisującego sytuację

przedstawioną w zadaniu, sprowadzeniu tego układu do równania kwadratowego z jedną niewiadomą i rozwiązaniu tego równania.

Zadanie jest trudne dla ogółu zdających. Bez błędnie rozwiązuje je około 30% zdających, ale zdecydowanie więcej – nie podejmuje próby rozwiązania tego zadania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskuje 0 punktów.

Zadanie wykorzystujące zależność droga – prędkość – czas po raz kolejny znalazło się w zestawie egzaminacyjnym z poziomu podstawowego. Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi poprawnie opisać tę sytuację w języku matematyki, a następnie rozwiązać odpowiednie równania i zinterpretować otrzymane wyniki. Tzw. zadanie tekstowe opisuje pewną sytuację rzeczywistą (maj 2010 – prostokątne baseny w hotelach, 2011 – trasa pokonywana przez turystę, maj 2012 i maj 2013 – linia kolejowa, prędkość, droga i czas). Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu jest czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Część zdających nie ma trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji, czyli dokonuje istotnego postępu w zadaniu. Niestety, w dalszej części rozwiązania nie wszyscy zdający potrafią rozwiązać zapisany układ równań, pojawiają się błędy logiczne i rachunkowe. Kolejny raz okazało się, że przekształcenia algebraiczne nie są mocną stroną zdających. Na koniec jeszcze jedna ważna sprawa, a mianowicie odpowiedź na pytanie, dlaczego w maju 2013 roku wskaźnik łatwości zadania tekstowe jest wyraźnie niższy niż w latach poprzednich? Przedstawiony rozkład uzyskanych wyników pokazuje, że ponad 50% zdających nie otrzymało nawet 1 punktu za to zadanie. Otóż odpowiedź brzmi – problemy z zamianą jednostek. Duża grupa zdających, zapisując układ równań przedstawiający sytuację opisaną w zadaniu, nie zamieniła 40 minut na $\frac{2}{3}$ h, zatem zgodnie z uwagą schemacie (jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów) otrzymała 0 punktów.

Rozwiązanie zadania tekstowego polega na ułożeniu układu równań opisującego sytuację przedstawioną w zadaniu, sprowadzeniu tego układu do równania kwadratowego z jedną niewiadomą i rozwiązaniu tego równania.

W schemacie oceniania, w zależności od sytuacji opisanej w zadaniu umieszczono jedno lub trzy sposoby rozwiązania. Zdający otrzymywali 2 punkty, jeżeli zapisali układ równań z dwiema niewiadomymi. Kolejny etap rozwiązania to zapisanie równania z jedną niewiadomą (kwadratowego lub wymiernego). Oczywiście zdający nie musiał zapisywać układu równań, mógł bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą. Kategorie pokonanie zasadniczych trudności zadania polegała na otrzymaniu równania z jedną niewiadomą.

Bardzo często zdający porównywali wielkości różnych typów. Równie często zdający zapisywali drugie równanie bez nawiasów i w dalszej części rozwiązania zadania nadal tych nawiasów nie widzieli, chociaż zdarzały się rozwiązania, w których zdający przy rozwiązywaniu układu równań uwzględniali nawiasy, których wcześniej nie zapisali. Po każdej z sesji odnotowano wiele rozwiązań, w których zdający prawidłowo zapisywali układ równań, ale nie podejmowali próby jego rozwiązania albo popełniali błędy przy jego rozwiązywaniu. Zaobserwowano błędne przekształcanie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz liczne błędy rachunkowe przy wyznaczaniu pierwiastków równania kwadratowego. Zdarzały się rozwiązania, w których zdający dokonali błędnej interpretacji prawidłowego rozwiązania. Typowym błędem było odgadywanie np.: liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę i nie uzasadnienie, że jest to jedyne rozwiązanie. Za tak przedstawione rozwiązanie zdający mógł otrzymać jedynie 1 punkt.

Podsumowanie

O zaskoczeniu nie może być mowy (zapowiedź w Informatorze, kolejnych 5 arkuszy to potwierdziło), że zadanie polegające na rozwiązaniu nierówności kwadratowej i zadanie umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego, tzw. Zadanie tekstowe, będą obecne w arkuszu. Umiejętności rozwiązywania nierówności kwadratowej i dobrania modelu w zadaniu z kontekstem była sprawdzana podczas każdej dotychczasowej sesji egzaminacyjnej.

Matematyka, przedmiot obowiązkowo zdawany na maturze w zakresie podstawowym, powinna być opanowana w stopniu co najmniej dostatecznym przez każdego ucznia. Nie jest to zadanie łatwe ani dla uczniów, ani dla nauczycieli. Wysiłek ucznia oraz nauczyciela powinien być racjonalny i twórczy, a nie mechaniczny. Tym bardziej, że matematyka daje każdemu nauczycielowi ogromne możliwości poszerzania materiału o ciekawe lub trudniejsze zadania.

Jakie wnioski wypływają z obserwacji wyników zdających w dwóch zadaniach, które rozwiązywali na maturze?

Po pierwsze, jest niewielka grupa zdających obowiązkowy egzamin z matematyki, którzy w omawianych dwóch zadaniach uzyskiwali maksymalne wyniki. Interesująca będzie obserwacja rozkładów wyników tych dwóch zadań w takich grupach zdających, przynajmniej do roku 2014 – przy niezmiennych wymaganiach egzaminacyjnych. Oczywiście jest niemal, że w takich grupach zdających ten proces będzie przebiegać najwolniej. Spodziewamy się większych przyrostów liczebności w grupach zdających, którzy za rozwiązania zadań z arkusza uzyskują tylko częściową punktację.

Po drugie, największy „zysk” zdający mogą osiągnąć w zadaniach, w których sprawdza się umiejętność użycia prostych, dobrze znanych obiektów (nierówność kwadratowa). Nieco mniejsze zdobycze punktowe dotyczą zadań wymagających dobrania modelu matematycznego do danej sytuacji (zadanie tekstowe).

I na koniec życzenia dla nas nauczycieli, aby na pytanie: „Co jest wykresem funkcji kwadratowej?”, nie padały takie odpowiedzi uczniów jak np.: „Kwadrat!”. I aby na kolejne pytanie: „Jak to?” uczniowie nie odpowiadali, np.: „Matematyka jest nauką logiczną. Skoro wykresem funkcji liniowej jest linia, to wykresem funkcji kwadratowej musi być kwadrat!” ☺.