



Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
18-400 Łomża, ul. Nowa 2; tel./faks: 086 216 44 95,
tel.: 086 473 71 20, 086 473 71 21, 086 473 71 22;
www.oke.lomza.com; e-mail: sekretariat@oke.lomza.com

O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ OTWARTYCH Z MATEMATYKI NA SPRAWDZIANIE

MATERIAŁY POMOCNICZE

OPRACOWANIE:
MAŁGORZATA MURAWSKA

PROJEKT OKŁADKI:
IVAYLA ŚWITAJEWSKA

ŁOMŻA 2008

Spis treści

I.	Wprowadzenie	3
II.	Otwarte zadania matematyczne na sprawdzianie 2007.....	4
III.	Ustalenie sposobu rozwiązania zadania oraz prezentacji tego rozwiązania	5
IV.	Wykonywanie obliczeń i posługiwanie się jednostkami miar	14
V.	Analizowanie otrzymanych wyników i ocenianie ich sensowności	19
VI.	Uwagi końcowe	22

I. Wprowadzenie

Analizując wyniki sprawdzianu w poprzednich latach, można zauważyć niepokojąco wysoki odsetek uczniów, którzy otrzymują 0 punktów za zadania otwarte z matematyki: od prawie 14% (zadanie 22., sprawdzian 2003) do ponad 50% (zadanie 24., sprawdzian 2004). Sytuację tę można próbować tłumaczyć brakiem motywacji części uczniów, ale na pewno nie jest to ani jedyna, ani główna przyczyna.

Sztuki rozwiązywania zadań tekstowych z matematyki uczniowie uczą się od początku szkolnej edukacji i nie da się braków w tym zakresie nadrobić w ciągu kilku tygodni. Niemniej, stosunkowo niewielkim nakładem pracy, można wyeliminować niektóre typy błędów, a tym samym zwiększyć szanse na uzyskanie dobrego wyniku.

Rozwiązywanie zadania matematycznego przebiega zwykle w kilku etapach, którym można przypisać konkretne umiejętności opisane w *Standardach wymagań egzaminacyjnych*, np.:

- ustalenie sposobu rozwiązania zadania oraz prezentacji tego rozwiązania (standard 3.8);
- wykonanie obliczeń (standard 5.3);
- przeanalizowanie otrzymanych wyników i ocenienie ich sensowności (standard 3.9).

W niniejszym materiale zaprezentowano autentyczne prace, ilustrujące typowe błędy popełniane przez uczniów na poszczególnych etapach rozwiązywania zadania. Wykorzystano rozwiązania zadań matematycznych ze sprawdzianu przeprowadzonego w kwietniu 2007 roku. Natomiast obszerną analizę rozwiązań uczniowskich i wskazówki dydaktyczne można znaleźć w sprawozdaniu ze sprawdzianu 2007 „Osiągnięcia uczniów kończących szkołę podstawową w roku 2007”^{*}.

* Sprawozdanie dostępne jest na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w Warszawie www.cke.edu.pl (Sprawdzian, informacje o wynikach) oraz Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Łomży www.oke.lomza.com/komunikaty/sp2007/

II. Otwarte zadania matematyczne na sprawdzianie 2007

Poniżej zamieszczono matematyczne zadania otwarte (21. i 22.), które rozwiązywali uczniowie na sprawdzianie w kwietniu 2007 roku. Przedstawiano również przykładowe poprawne rozwiązania. Za rozwiązanie zadania 21. uczeń mógł otrzymać 3 punkty, a za rozwiązanie zadania 22. – 4 punkty. Opis badanych umiejętności i wyniki uczniów znajdują się w sprawozdaniu ze sprawdzianu.

Zadanie 21.

Klasa VI miała 5 lekcji, po 45 minut każda. Ile czasu upłynęło od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej, jeśli jedna przerwa była 15-minutowa, a pozostałe 10-minutowe?

Obliczony czas wyraż w godzinach.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

Przykłady poprawnych rozwiązań

<i>I sposób:</i> $5 \cdot 45 = 225$ [min] $3 \cdot 10 = 30$ [min] $225 + 30 + 15 = 270$ [min] $270 : 60 = 4,5$ Odp. Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 4,5 godz.	<i>III sposób:</i> $60 + 3 \cdot 55 + 45 = 270$ $240 + 30 = 270$ 4 godz. 30 min. Odp. Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 4 i pół godziny.
<i>II sposób:</i> $5 \cdot 45 + 3 \cdot 10 + 15 = 270$ 1 godz. = 60 min Odp. Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło $4 \frac{1}{2}$ h.	<i>IV sposób:</i> $45 + 10 + 45 + 10 + 45 + 10 + 45 + 15 + 45 = 270$ Odp. Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 4 godz. i 30 minut.

Zadanie 22.

Prostokątna podłoga w klasie ma wymiary 6,5 m i 9 m. Jedna puszka lakieru kosztuje 15,20 zł i wystarcza na pomalowanie 10 m^2 podłogi. Ile puszek lakieru trzeba kupić, żeby pomalować całą podłogę? Ile będą kosztowały?

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Przykłady poprawnych rozwiązań

<i>I sposób:</i> $6,5 \cdot 9 = 58,5$ [m^2] $58,5 : 10 = 5,85$ – 6 puszek $6 \cdot 15,20 = 91,20$ [zł] Odp. Trzeba kupić 6 puszek lakieru. Będą kosztowały 91,20 zł.	<i>II sposób:</i> $6,5 \cdot 9 = 58,5$ [m^2] 1 puszka – 10 m^2 – 15,20 zł 2 puszki – 20 m^2 – 30,40 zł $3 \cdot 30,40 = 91,20$ zł Odp. Trzeba kupić 6 puszek lakieru. Będą kosztowały 91,20 zł.	<i>III sposób:</i> $6,5 \cdot 9 = 58,5$ [m^2] $6 \cdot 15,20 = 91,20$ [zł] Odp. Trzeba kupić 6 puszek lakieru. Będą kosztowały 91,20 zł.
---	---	--

W następnych rozdziałach materiału przedstawiono prace uczniowskie ilustrujące różne problemy. Dla większej przejrzystości nie jest powtarzana treść zadań – na podstawie rozwiązania można określić, do którego zadania się odnosi.

III. Ustalenie sposobu rozwiązania zadania oraz prezentacji tego rozwiązania

W pisemnych zadaniach otwartych uczeń samodzielnie formułuje odpowiedź. Ma możliwość przedstawienia swojego rozumowania poprzez zapisanie, zgodnie z poleceniem w wyznaczonym miejscu, kolejnych kroków. Dzięki temu można zaobserwować miejsce popełnienia błędu i pozytywnie ocenić czynności wykonane poprawnie.

Wielu uczniów nie tylko zapisało wszystkie obliczenia, ale także opatrzyło je **słownym komentarzem**, ułatwiającym ocenę wykonywanych kroków:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$5 \cdot 45 = 225 (\text{min}) = 3 \text{ godz. } 45 \text{ min.} - \text{tyle czasu trwały lekcje}$$

$$15 + 3 \cdot 10 = 15 + 30 = 45 (\text{min}) - \text{tyle czasu trwały wszystkie przerwy}$$

$$3,45 + 45 = 4 \text{ godz. } 30 \text{ min.}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło $4 \text{ godz. } 30 \text{ min.}$

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

$$6,5 \cdot 9 = 58,5 (\text{zł}) (\text{m}^2) - \text{tyle m}^2 \text{ ma podłoga}$$

$$58,5 : 10 = 5,85 - \text{trzeba kupić } 6 \text{ puszek lakieru}$$

$$12,20 \cdot 6 = 91,20 (\text{zł}) - \text{tyle będzie kosztować } 6 \text{ puszek tego lakieru}$$

Odpowiedzi: Trzeba kupić 6 puszek lakieru. Będą kosztowały $91,20$ zł.

Kolejne prace pokazują, że nawet jeśli w rozwiązaniu są błędy, to zapisane komentarze umożliwiają egzaminatorowi określenie czynności wykonanych poprawnie:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$45 \cdot 5 = 225 \text{ minut}$	$225 + 65 = 290 \text{ minut} = 4 \text{ godziny } i 50 \text{ minut}$
$15 + (4 \cdot 10) = 15 + 40 = 55 \text{ minut}$	

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło $4 \text{ godziny } i 50 \text{ minut}$

Uczeń błędnie ustalił liczbę przerw dziesięciminutowych, popełnił błąd rachunkowy, obliczając łączny czas trwania wszystkich lekcji i przerw, poprawnie zamienił minuty na godziny.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Cena 1 puszeki lakieru: 15,20 wystarcza na porównanie 10 m²

Pole podłogi: 9 m, 6,5 m

liczba potrzebnych puszek: $58,5 : 10 = 5,85$ puszek

koszt puszek: $5,85 \cdot 15,20 = 88,92$

Odpowiedzi: Trzeba kupić 5,85 puszek lakieru. Będą kosztowały 88,92 zł.

Uczeń poprawnie obliczył powierzchnię podłogi, ale podana przez niego liczba potrzebnych puszek nie jest liczbą całkowitą; mnożenie liczb dziesiętnych wykonał poprawnie.

Podobnie w kolejnej pracy można bez trudu prześledzić etapy rozwiązania, mimo braku staranności w jego zapisie:

45 min - 3,45 godzin

przerwy trwały: 45 min

wszystko - 270 min - 4,30 godzin

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 4,30 godzin.

Niektóre rozwiązania świadczą o tym, że **brak komentarzy** mógł być przyczyną błędu w rozwiązaniu:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

4
6,5
58,5 m²

10 m² = 15,20 zł

5,85 ≈ 6 m

6 · 10 = 60 m 6 · 10 = 60

Odpowiedzi: Trzeba kupić ...6... puszek lakieru. Będą kosztowały ...60... zł.

Trudno oprzeć się wrażeniu, że uczeń „zapomniał”, jakie wielkości opisują liczby 6 i 10 i że nie można obliczyć kosztu zakupu, mnożąc te liczby.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić⁷... puszek lakieru. Będą kosztowały ^{106,40}..... zł.

Gdyby uczeń komentował wykonywane obliczenia (choćby „w głowie”), nie mógłby wyniku dzielenia $58,5:9$ zinterpretować jako ilości potrzebnego lakieru.

Warto pamiętać, że wypisanie danych, nie jest analizą zadania i nie gwarantuje uczniowi sukcesu. Do poprawnego rozwiązania konieczne jest znalezienie zależności między danymi i szukanymi:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło

Uczeń zapisał, że jest 5 lekcji, ale uwzględnił tylko dwie przerwy. Mimo, że obliczał łączny czas trwania lekcji i łączny czas trwania przerw, to wyników tych nie zsumował. Świadczyć to może o tym, że uczeń nie widzi żadnego związku między danymi i szukanymi, a poprawne zapisy są raczej dziełem przypadku.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić puszek lakieru. Będą kosztowały zł.

Również w tym zadaniu uczeń wypisał dane, ale nie dokonał analizy zadania.

Przykład 2.

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło~~7~~...~~h~~...~~65~~ min.

W tym rozwiązaniu również pojawiła się liczba (54), która jest wynikiem obliczeń wykonanych w pamięci. Można przypuszczać, że jest to łączny czas trwania przerw. Niestety, uczeń nie zapisał odpowiedniego działania i nie ma pewności, czy poprawnie ustalił liczbę przerw i błąd wynika jedynie z przestawienia cyfr (54 zamiast 45).

Przykład 3.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić ...~~2~~... puszek lakieru. Będą kosztowały ~~20~~...~~40~~ zł.

Uczeń zapisał wyłącznie odpowiedź (zapisów skreślonych nie można brać pod uwagę). Zwykle schemat punktowania zawiera uwagę, że w takiej sytuacji uczeń nie może otrzymać punktów, nawet jeśli wynik jest poprawny.

Niektóre **prace zapisane są chaotycznie** – wyglądają jak brudnopis. Uczeń poszukując rozwiązania, zapisuje kolejne pomysły: część obliczeń skreśla, niektóre pozostawia niedokończone. Prace takie nie zawsze zawierają elementy rozwiązania, konieczne do jego oceny:

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło~~4~~ godzin ~~10~~ minut

Uczeń miał szansę dojść do poprawnego wyniku, gdyby wykonał dodawanie: $60+55+55+55+45$. Pozostawione zapisy są, niestety, niepoprawne.

Kolejny problem w ocenie stanowią prace, w których **część rozwiązania**, istotna dla ustalenia punktacji, znajduje się w **brudnopisie**:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

~~$45 \text{ min} \cdot 5 = 225 \text{ min}$~~
 ~~225 min~~ + $15 \text{ min} + 10 \text{ min} + 10 \text{ min} + 10 \text{ min} =$
 $= 270 \text{ min}$
 $270 \text{ min} =$

$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot 5 \\ \hline 225 \end{array}$ 1 godz = 60 min

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ~~225 min~~ 270 min

Uczeń skreślił dobry wynik mnożenia (225) i wpisał liczbę 249 niewiadomego pochodzenia. Obliczenia wykonał w brudnopisie:

$$45 + 45 + 45 + 45 + 45 - 24 + 25 = 49$$

i nawet gdyby były poprawne, nie podlegałyby ocenie.

Przykład 2.

Uczeń poprawnie wykonał mnożenie w brudnopisie:

$$\begin{array}{r} 15,20 \\ \cdot 7 \\ \hline 106,40 \end{array}$$

Do czystopisu wpisał błędny wynik (160,40 zamiast 106,40) i nie może otrzymać punktu za obliczenia:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

$P = a \cdot b$ ~~$6,5 \cdot 15,20 =$~~
 $P = 6,5 \cdot 9$ $7 \cdot 15,20 = 160,40 \text{ zł}$
 $P = 67,5 \text{ m}^2$

Odpowiedzi: Trzeba kupić ~~7~~... puszek lakieru. Będą kosztowały ~~160,40~~ zł.

Przykład 3.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

$P_{\square} = 2a \cdot 2b$
 $P = 6,5 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} = 54 \text{ m}^2$
 $10 \text{ m}^2 = 15,20 \text{ zł}$
 $54 \text{ m}^2 = 71 \text{ zł}$
 $71 \text{ zł} + 15,20 \text{ zł} = 86,20 \text{ zł}$

Odpowiedzi: Trzeba kupić ~~7~~... puszek lakieru. Będą kosztowały ~~86,20~~ zł.

Część rozwiązania zapisana w brudnopisie:

$$10m = 15,20$$

$$50 =$$

$$30,40 - 20m$$

$$45,60 - 30m$$

$$55,80 \quad 40m$$

$$71,00 \quad 50m$$

$$71$$

$$\begin{array}{r} 15,20 \\ \cdot 4 \\ \hline 60,80 \end{array}$$

pozwała się domyślać, że zapis w czystopisie $54 m^2 = 71 \text{ zł}$ oznacza koszt zakupu farby wystarczającej na pomalowanie $50 m^2$ podłogi.

Uwagę w tej pracy zwraca także sprzeczność dwóch zapisów dotyczących obliczania pola powierzchni podłogi: uczeń zapisał niewłaściwe wyrażenie algebraiczne i poprawne wyrażenie arytmetyczne.

Częściej zdarzały się sytuacje odwrotne, gdy uczeń poprawnie zapisał **wzór na pole prostokąta**, ale nie umiał go zastosować:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

$$P = a \cdot b$$

$$P = 6,5 \cdot 9 = 58,5 - 2 = 114,0 m^2$$

Odpowiedzi: Trzeba kupić puszek lakieru. Będą kosztowały zł.

Niektóre prace mogą świadczyć o tym, że uczeń po zakończeniu rozwiązywania zadania jeszcze raz je przeanalizował i zauważył jakiś błąd. Wprowadził **poprawki w pierwszej części rozwiązania**, ale nie zmienił jego drugiej części:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

$$6,5 \cdot 9 = 58,5 (m^2) - \text{pole powierzchni podłogi}$$

$$58,5 : 10 = \cancel{5,85} \approx 6 - \text{trzeba kupić } 6 \text{ puszek farby lakiers}$$

$$6 \cdot 15,20 = \underline{136,80 (zł)}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 6,5 \\ \cdot 9 \\ \hline 58,5 \\ 41 \\ \hline 15,2 \\ \cdot 6 \\ \hline 136,8 \end{array}$$

Odpowiedzi: Trzeba kupić ~~9~~ ⁶ puszek lakieru. Będą kosztowały 136,80 zł.

Uczeń początkowo zapisał, że potrzeba 9 puszek lakieru. Zmienił decyzję (na 6 puszek), ale nie obliczył ponownie kosztu zakupu lakieru.

I jeszcze jedna sytuacja – **błędy** powstałe prawdopodobnie z **nieuwagi**:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić puszek lakieru. Będą kosztowały^{106,40} zł.

Uczeń popełnił błąd przy przepisywaniu liczby z zadania (6,9 zamiast 6,5).

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło^{4 godz. 40 min}.....

Uczeń poprawnie rozwiązuje zadanie i z niewiadomych przyczyn do odpowiedzi wpisuje błędny wynik (4 godziny 40 minut zamiast 4 godziny 30 minut).

Niekiedy uczniowie przedstawiają **dwa rozwiązania** zadania (poprawne i błędne):

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić puszek lakieru. Będą kosztowały^{45,60}..... zł.

Uczeń obliczał i pole, i obwód prostokąta. Poprawnie obliczył koszt zakupu 3 puszek lakieru, ale jest to ilość niewystarczająca na pomalowanie zarówno 585 m², jak i 31 m² podłogi. Na podstawie przedstawionego rozwiązania nie można stwierdzić, że uczeń rozumie pojęcie pola prostokąta.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ~~30~~ ³ godzin... 30 min....

W tej pracy również uczeń nie wskazał jednoznacznie rozwiązania. Jedynie wynik wpisany do odpowiedzi sugeruje, że uczeń zdecydował się na 3 przerwy 10-minutowe.

Poważny problem stanowią **nieczytelnie zapisane rozwiązania**. Wielu uczniów nie przywiązuje wagi do czytelnego zapisania cyfr:

Będą kosztowały zł. ^{43,60}

Trzeba kupić ~~6~~ puszek lakieru.

Nie zawsze udaje się ustalić na podstawie innych zapisów ucznia, o jaką cyfrę chodzi.

Z tego samego powodu, tzn. w celu uniknięcia błędnego odczytania odpowiedzi przez egzaminatora, warto uczyć uczniów, aby, zgodnie z instrukcją, pomyłki przekreślali, a nie prze-rabiali. Uczniowie z zaburzoną grafią powinni dołożyć wszelkich starań, aby ich pismo było czytelne:

IV. Wykonywanie obliczeń i posługiwanie się jednostkami miar

Na podstawie obliczeń przedstawionych przez ucznia często można określić przypuszczalną przyczynę powstania błędu. Niektóre z nich nie mogą dziełem przypadku czy omyłką, ale są skutkiem **niewystarczającej sprawności rachunkowej**:

$$\begin{array}{r} 31 \\ \cdot 15,20 \\ \hline 41,20 \end{array}$$

Uczeń poprawnie wykonał mnożenie 6 przez 2 i przez 5, pomylił się przy mnożeniu przez 1. Trudno stwierdzić, jaki wpływ na popełnienie błędu miało wykonywanie tych obliczeń w brudnopisie, nie mniej na pewno przydałby się nawyk szacowania wyników w pamięci, np. $6 \cdot 15 > 60$.

Niekiedy błąd w mnożeniu pisemnym jest skutkiem złego nawyku ucznia zapisywania czynników „przecinek pod przecinkiem”.

$$\begin{array}{r} 61 \\ \cdot 15,20 \\ \hline 305 \\ \leftarrow 61 \\ \hline 915,20 \end{array}$$

Oczywiście wielu uczniów poprawnie wykonuje mnożenie tak zapisane, chociaż z większym nakładem pracy i czasu:

$$\begin{array}{r} 6,00 \\ \cdot 15,20 \\ \hline 000 \\ 1200 \\ 3000 \\ 600 \\ \hline 91,2000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15,20 \\ \times 59,00 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ + 13680 \\ \hline 5858000 \end{array}$$

Z kolei przy dzieleniu liczb dziesiętnych, niektórzy uczniowie pozbywają się przecinka z dzielnej, np. $58,5:10=585:100$

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

<p>Fale podłogi:</p> $6,5 \cdot 9 = 58,5 \text{ (m}^2\text{)}$	<p>Ile trzeba puszek?:</p> $\begin{array}{r} 58,5 \\ 58,5:100 \\ - 500 \\ \hline 850 \\ - 800 \\ \hline 500 \\ - 500 \\ \hline 0 \end{array}$ <p>$58,5 \approx 60$</p>	<p>cena puszek:</p> $\begin{array}{r} 15,20 \\ \cdot 6 \\ \hline 91,20 \end{array}$
--	---	---

Odpowiedzi: Trzeba kupić puszek lakieru. Będą kosztowały 91,20 zł.

Szczególnie dużo kłopotów sprawiło uczniom **mnożenie i dzielenie liczb dziesiętnych przez 10 i 100**. Uczniowie niechętnie wykonują takie obliczenia w pamięci, przesuwa-
jąc odpowiednio przecinek. Często wykonują obliczenia sposobem pisemnym:

Przykład 1.

Uczeń nie wiedział, ile cyfr oddzielić przecinkiem.

Przykład 2.

Także temu uczniowi sprawia trudność ustalenie miejsca przecinka.

Uczniowie, wykonując obliczenia tego typu w pamięci, również popełniają błędy:

Może to świadczyć o niezrozumieniu własności mnożenia przez 10, 100, 1000... lub o braku należytej staranności przy zapisywaniu rozwiązania zadania.

Warto na każdym etapie edukacyjnym zachęcać uczniów do troski o formę zapisu, do **staranności** i pamiętaniu o osobie, która będzie pracę oceniała. Nawet drobny błąd w zapisie rozwiązania może być przyczyną utraty punktów. Staranność zapobiega powstaniu wielu niezamierzonych błędów. W poniższej pracy uczeń poprawnie ustalił miejsce przecinka dziesiętnego w dwóch obliczeniach (w iloczynie i ilorazie) wykonanych w czystopisie:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

<p>Dane a = 6,5 m b = 8 m</p> <p>szukane p = ? P = a · b P = 6,5 · 8 = 52 m²</p>	$\frac{585}{585 : 10} = 58,5 \text{ puszek}$ $\begin{array}{r} 585 \\ - 50 \\ \hline 85 \\ - 80 \\ \hline 50 \\ - 50 \\ \hline 0 \end{array}$ <p>W = okrąglenie 85</p>	$\begin{array}{r} 47 \\ 1520 \\ 59 \\ \hline 13680 \\ + 7600 \\ \hline 89680 \end{array}$
---	--	---

Odpowiedzi: Trzeba kupić 58,5... puszek lakieru. Będą kosztowały 896,80 zł.

Jedno z obliczeń do tego zadania wykonał w brudnopisie:

$$\begin{array}{r} 65 \\ - 19 \\ \hline 585 \end{array}$$

Być może z pośpiechu czy też braku staranności (do czego skłania nazwa *brudnopis*) uczeń ten nie wpisał przecinka do iloczynu i wynik z błędem przepisał do czystopisu.

Częstą usterką w pracach jest **błędne użycie znaku równości** w zapisanych obliczeniach:

$$\begin{array}{l} 31 : 10 = 30 \\ 15,20 \cdot 4 = 60,80 \text{ gr} \\ 20 \text{ yr} \cdot 4 = 80 \text{ yr} \\ 15,20 \cdot 4 = 60 + 80 \text{ yr} = 60,80 \end{array}$$

Z wykonywaniem obliczeń związane bywa posługiwanie się jednostkami. Zadanie 21. sprawdzało **stosowanie jednostek czasu** (godzin i minut), w tym zamianę minut na godziny. Błędy uczniów w tym zakresie były dwójakiego rodzaju: traktowanie minuty jako setnej części godziny oraz niepoprawne zapisywanie czasu.

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 45 \\ \cdot 5 \\ \hline 275 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{lekcje} = 45 \cdot 5 = 2 \text{ godz. } 75 \text{ min} \\ \text{przerwy} = 15 \text{ min} + 4 \cdot 10 \text{ min} = 15 + 40 = 55 \text{ min} \\ \text{razem} = 2 \text{ godz. } 75 \text{ min} + 55 \text{ min} = 3 \text{ godz. } 20 \text{ min} \end{array} \end{array}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 3 godz. 20 min.

Uczeń dwukrotnie błędnie zamieniał godziny na minuty:

$$275 \text{ min} = 2 \text{ godz. } 75 \text{ min}$$

$$2 \text{ godz. } 75 \text{ min} + 55 \text{ min} = 3 \text{ godz. } 20 \text{ min}$$

Obie te zamiany świadczą o wykonywaniu obliczeń w systemie dziesiętkowym.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 45 \\ + 10 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ + 10 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 65 \\ + 15 \\ \hline 80 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ + 10 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 225 \\ + 45 \\ \hline 270 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \text{ godzin} \\ 270 : 60 \\ \hline 4 \text{ } \\ \underline{240} \\ 300 \\ \hline 300 \\ \hline = = = \end{array} \quad \begin{array}{l} 45 \text{ godzin} = 4 \text{ } \\ \frac{30}{10} \end{array} \end{array}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 4 godz. 30 min.

Uczeń, zapisując czas, użył w jednym miejscu przecinka dziesiętnego, ale mimo to pamiętał, że godzina ma 60 minut.

Wielu uczniów poprawnie interpretowało wynik dzielenia z resztą:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$5 \cdot 45 = 225 + 15 = 235 + 40 = 275$$

$$275 : 60 = \del{4} 4 \text{ r } 35$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ...4 godz. 35 min.

Niektórzy wykonywali obliczenia na ułamkach zwykłych:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$\left(5 \cdot \frac{45}{60}\right) + \frac{15}{60} + \left(3 \cdot \frac{10}{60}\right) = \frac{225}{60} + \frac{15}{60} + \frac{30}{60} = \frac{270}{60} = 4 \frac{30}{60} \text{ (h)} = 4 \frac{1}{2} \text{ (h)}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ...4 h 30 min.

Niestety, wielu uczniów bezrefleksyjnie przechodziło z systemu sześćdziesiątkowego w dziesiątkowy i na odwrót:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$5 \cdot 45 \text{ min} = 225 \text{ min} = 2 \text{ godz. } 25 \text{ min (czas lekcji bez przerw)}$$

$$3 \cdot 10 \text{ min} + 15 \text{ min} = 30 \text{ min} + 15 \text{ min} = 45 \text{ min (czas trwania przerw)}$$

$$2 \text{ godz. } 25 \text{ min} + 45 \text{ min} = \del{3 \text{ godz. } 10 \text{ min}} 3 \text{ godz. } 10 \text{ min}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ...3 godz. 10 min.

W pierwszej linii rozwiązania 1 godzina ma 100 minut, a w ostatniej – 60 minut.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$\begin{array}{r} 45 \\ - 5 \\ \hline 2 \text{ b } 5 \text{ min} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3,75 = 4,15 \text{ godz - czas trwania lekcji} \\ 225 + 60 \\ - 180 \\ \hline 450 \\ - 60 \\ \hline 300 \\ = 300 \end{array}$	$10 \text{ min} \cdot 3 + 15 \text{ min} = 30 \text{ min} + 15 \text{ min} = 45 \text{ min}$
	$4,15 \text{ godz.} + 45 \text{ min.} = 5 \text{ godz.}$	

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ...5 godz.

Część ułamkową dzielnej (0,75 godziny) uczeń błędnie zinterpretował jako 75 minut.

Warto zwrócić uwagę na pracę ucznia, który nie zapomniał, czego uczył się w klasie trzeciej. Wykonał obliczenia na **wyrażeniach dwumianowanych** i posłużył się „tabelkami”:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło 5.25 godzin...

Niestety, obliczył czas od trwania 6 lekcji i 5 przerw, ponadto błędnie zapisał wynik w odpowiedzi.

Kolejny problem polega na **stosowaniu niewłaściwych oznaczeń**. I tak, oprócz poprawnych oznaczeń godziny (h , godz., g.), pojawiały się błędne, np. g (=gram) i ha (=hektar). Minuty zamiast min oznaczano m (=metr) oraz mm (=milimetr).

W zadaniu 22. wystąpiły pojęcia **długości i pola**. Wprowadzie stosowanie jednostek (metr i metr kwadratowy) nie było oceniane, jednak analiza rozwiązań uczniowskich pokazuje, jak wielu uczniów ma problemy w tym zakresie:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

Odpowiedzi: Trzeba kupić 3..... puszek lakieru. Będą kosztowały 45,60 zł.

Warto zagadnieniu posługiwania się mianem poświęcić na lekcjach trochę czasu, pamiętając, że w gimnazjum uczniowie rozpoczną naukę fizyki i pewne nawyki w tym zakresie powinni mieć już ukształtowane.

V. Analizowanie otrzymanych wyników i ocenianie ich sensowności

Rozwiązywaniu każdego zadania, nie tylko matematycznego, powinna towarzyszyć refleksja, spojrzenie wstecz, upewnienie się, że odpowiedź jest na temat, wyczerpująca i nie zawiera błędów. Prace uczniowskie świadczą o tym, jak wiele do zrobienia jest w tej dziedzinie. Sytuacja przedstawiona w zadaniu 21. jest bliska wszystkim uczniom. Mimo to pojawiały się odpowiedzi całkowicie odbiegające od **codziennych doświadczeń uczniów**:

Przykład 1.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$\begin{array}{r} 15 \text{ min} \\ + 40 \text{ min} \\ \hline 55 \text{ min} \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \cdot 5 \\ \hline 225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 225 \\ - 55 \\ \hline 170 \end{array}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło~~17~~...0 godz.

Uczeń powinien zaniepokoić się wynikiem *17 godzin* i poszukać błędu w rozwiązaniu.

Przykład 2.

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$45 \cdot 5 = 225 \text{ min} \quad 225 : 60 = 3 \text{ godz } 45 \text{ min}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot 5 \\ \hline 225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 225 \\ \cdot 60 \\ \hline 180 \\ \hline 45 \end{array} \quad 10 \text{ min} \cdot 5 + 15 \text{ min} = 50 \text{ min} + 15 \text{ min} = 65 \text{ min} = 1 \text{ godz } 5 \text{ min}$$

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło *1 godz 5 min*.

Również wynik *1 godz. 5 min* jest nieprawdopodobny i uczeń nie powinien go pozostawić jako ostateczną odpowiedź.

Część zadania 22. dotyczyła zakupów, czyli sytuacji, w której niemal każdy trzynastolatek nieraz się znajdował. Jednak i tu brakowało refleksji, czy obliczona kwota jest realna:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

$$P_{\square} = a \cdot b = 2 \cdot 6,5 \text{ m} + 2 \cdot 9 \text{ m} = 130 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2 = 148 \text{ m}^2$$

$$= 31,0 \text{ m}^2$$

$$\begin{array}{r} 15,20 \\ \cdot 4 \\ \hline 608,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ \cdot 4,15 \\ \hline 130,00 \\ + 18,00 \\ \hline 310 \text{ m}^2 \end{array}$$

Odpowiedzi: Trzeba kupić *4*... puszek lakieru. Będą kosztowały *608,00* zł.

Wystarczyło w pamięci oszacować, że *4 · 15,20* to tylko trochę więcej niż *60 (= 4 · 15)*, więc wynik *608,00* należy odrzucić.

Umiejętność **szacowania wyników** obliczeń pozwala uniknąć błędów wynikających z nieuwagi, np. niewstawienie przecinka lub wstawienie go w niewłaściwym miejscu:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić **59**... puszek lakieru. Będą kosztowały **8968**.. zł.

Przy obliczaniu pola prostokąta wystarczyło zauważyć, że $6,5 \cdot 9 < 6,5 \cdot 10 = 65$, aby odrzucić wynik 585 . Natomiast 100 puszek lakieru kosztowałyby 1520 zł, więc 8968 zł za 59 puszek, to zdecydowanie za dużo.

I jeszcze jedna praca, w której uczeń nie zastanowił się nad wynikiem, wpisywanym do odpowiedzi:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić **6**... puszek lakieru. Będą kosztowały **10,90**.. zł.

90 zł

10,90 zł

Nie jest możliwe, aby 6 puszek lakieru kosztowało mniej niż 1 puszka.

Niekiedy uczeń ma świadomość, że gdzieś popełnił błąd, a mimo to nie podejmuje próby znalezienia go:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedzi.

Odpowiedzi: Trzeba kupić **7**..... puszek lakieru. Będą kosztowały **136,40** zł.

Uczeń dwukrotnie obliczał iloczyn $15,20 \cdot 7$, raz wykonując jedno mnożenie, a drugi raz – wykorzystując rozdzielność mnożenia względem dodawania i otrzymał różne wyniki (do odpowiedzi wpisał błędny).

Ważnym etapem rozwiązywania zadania, nie tylko matematycznego, jest **powrót do treści zadania** po zakończeniu pisania odpowiedzi. Trzeba upewnić się, czy zrealizowany został każdy element polecenia, czy zredagowana odpowiedź jest pełna:

Zapisz obliczenia i uzupełnij odpowiedź.

45
+ 5

225

~~5~~
 $15 + 10 + 10 + 10 = 45$

225
× 5

270

Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ...270...minut.

Uczeń nie wykonał polecenia: *Obliczony czas wyraż w godzinach*. Ponowne, uważne przeczytanie zadania pozwoliłoby uniknąć tego błędu.

VI. Uwagi końcowe

Wszyscy nauczyciele, również uczniowie i ich rodzice, doskonale wiedzą, że do poprawnego rozwiązania zadania matematycznego niezbędne są m.in.:

- przeczytanie i zrozumienie wszystkich elementów polecenia,
- przeanalizowanie treści zadania, znalezienie zależności między danymi i szukanymi,
- znajomość technik wykonywania obliczeń i sprawność rachunkowa.

Umiejętności te kształtowane są na lekcjach matematyki przez wszystkie lata nauki szkolnej.

W niniejszym materiale skoncentrowaliśmy się na innych aspektach pracy ucznia: sposobie przedstawienia rozwiązania, także czytelnym piśmie, zapisaniu obliczeń, oszacowaniu wyniku obliczeń, także z wykorzystaniem własności działań, sprawdzeniu sensowności otrzymanego wyniku, odwołaniu się do własnych doświadczeń, upewnieniu się, że udzielona odpowiedź jest pełna i adekwatna do polecenia/pytania. Przygotowywanie uczniów do sprawdzianu jest dobrą okazją do uświadamiania szóstoklasistom, jak ważne jest wykonanie tych czynności – mogą mieć one znaczący wpływ na wynik uzyskany podczas sprawdzianu. Nauczyciel-egzaminator nie zna ucznia, którego pracę sprawdza. Nie ma możliwości uwzględnienia wysiłku ucznia włożonego w uczenie się, poczynionych przez niego postępów ani uwarunkowań rodzinnych i środowiskowych. Nie zawsze może odczytać pismo. Musi przestrzegać procedury sprawdzania i ocenić tylko to, co uczeń przedstawił w swojej pracy.

Opanowanie umiejętności rozwiązywania zadań matematycznych wymaga czasu i wysiłku. Warto w tym miejscu przypomnieć znaną maksymę:

„W matematyce nie ma drogi specjalnie dla królów.”

Euklides