

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA  
OKRĘGOWE KOMISJE EGZAMINACYJNE

---

**Informator**  
o egzaminie eksternistycznym  
przeprowadzanym od sesji jesiennej 2016  
z zakresu liceum ogólnokształcącego

**MATEMATYKA**



# MATEMATYKA

## Informator o egzaminie eksternistycznym przeprowadzanym od sesji jesiennej 2016 z zakresu liceum ogólnokształcącego

opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną  
we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi  
w Gdańsku, Jaworznie, Krakowie, Łodzi,  
Łomży, Poznaniu, Warszawie i Wrocławiu.

Warszawa 2015

### Centralna Komisja Egzaminacyjna

ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa  
tel. 22 536 65 00  
ckesekr@cke.edu.pl  
www.cke.edu.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku

ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk  
tel. 58 320 55 90  
komisja@oke.gda.pl  
www.oke.gda.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie

ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno  
tel. 32 616 33 99  
sekretariat@oke.jaworzno.pl  
www.oke.jaworzno.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

os. Szkolne 37, 31-978 Kraków  
tel. 12 683 21 01  
oke@oke.krakow.pl  
www.oke.krakow.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży

al. Legionów 9, 18-400 Łomża  
tel. 86 216 44 95  
sekretariat@oke.lomza.pl  
www.oke.lomza.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi

ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź  
tel. 42 634 91 33  
komisja@komisja.pl  
www.komisja.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu

ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań  
tel. 61 854 01 60  
sekretariat@oke.poznan.pl  
www.oke.poznan.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa  
tel. 22 457 03 35  
info@oke.waw.pl  
www.oke.waw.pl

### Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu

ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław  
tel. 71 785 18 52  
sekretariat@oke.wroc.pl  
www.oke.wroc.pl

## **SPIS TREŚCI**

I	Informacje ogólne .....	7
II	Wymagania egzaminacyjne .....	11
III	Opis egzaminu .....	15
IV	Przykładowy arkusz egzaminacyjny .....	18
V	Przykładowe rozwiązania zadań zamieszczonych w arkuszu egzaminacyjnym i ich ocena .....	35



# I INFORMACJE OGÓLNE

## I.1. Podstawy prawne

Zgodnie z ustawą z 7 września 1991 r. o systemie oświaty (z późn. zm.) egzaminy eksternistyczne są integralną częścią zewnętrznego systemu egzaminowania. Za przygotowanie i przeprowadzanie tych egzaminów odpowiadają Centralna Komisja Egzaminacyjna i okręgowe komisje egzaminacyjne.

Sposób przygotowania i przeprowadzania egzaminów eksternistycznych reguluje rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 11 stycznia 2012 r. w sprawie egzaminów eksternistycznych (Dz.U. z 17 lutego 2012 r., poz. 188). Na podstawie wspomnianego aktu prawnego CKE i OKE opracowały *Procedury organizowania i przeprowadzania egzaminów eksternistycznych z zakresu szkoły podstawowej dla dorosłych, gimnazjum dla dorosłych, liceum ogólnokształcącego dla dorosłych oraz zasadniczej szkoły zawodowej*.

Egzaminy eksternistyczne z zakresu liceum ogólnokształcącego są przeprowadzane z przedmiotów, którymi są: język polski, język obcy nowożytny, historia, wiedza o społeczeństwie, podstawy przedsiębiorczości, geografia, biologia, chemia, fizyka, matematyka, informatyka – zgodnie z wymaganiami określonymi w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 30 sierpnia 2012 r., poz. 977).

## I.2. Warunki przystąpienia do egzaminów eksternistycznych

Do egzaminów eksternistycznych z zakresu wymagań określonych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego może przystąpić osoba, która ukończyła gimnazjum albo ośmioletnią szkołę podstawową.

Osoba, która chce zdawać wyżej wymienione egzaminy eksternistyczne i spełnia formalne warunki, powinna nie później niż na 2 miesiące przed terminem rozpoczęcia sesji egzaminacyjnej złożyć do jednej z ośmiu okręgowych komisji egzaminacyjnych wniosek o dopuszczenie do egzaminów zawierający:

- 1) imię (imiona) i nazwisko,
- 2) datę i miejsce urodzenia,

3) numer PESEL, a w przypadku braku numeru PESEL – serię i numer paszportu lub innego dokumentu potwierdzającego tożsamość,

4) adres,

5) wskazanie, jako typu szkoły, liceum ogólnokształcącego.

Do wniosku należy dołączyć także świadectwo ukończenia gimnazjum albo świadectwo ukończenia ośmioletniej szkoły podstawowej. Wniosek ten znajduje się na stronach internetowych OKE w formie załącznika do *Procedur organizowania i przeprowadzania egzaminów eksternistycznych*.

W terminie 14 dni od dnia otrzymania przez OKE wniosku zainteresowana osoba zostaje pisemnie poinformowana o wynikach postępowania kwalifikacyjnego. Od rozstrzygnięcia komisji okręgowej służy odwołanie do dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w terminie 7 dni od dnia doręczenia tego pisma. Rozstrzygnięcie dyrektora CKE jest ostateczne. W przypadku zakwalifikowania osoby do zdawania egzaminów eksternistycznych dyrektor OKE informuje ją o konieczności złożenia deklaracji oraz dowodu wniesienia opłaty za zadeklarowane egzaminy lub wniosku o zwolnienie z opłaty.

Informację o miejscach przeprowadzania egzaminów dyrektor OKE podaje do publicznej wiadomości na stronie internetowej okręgowej komisji egzaminacyjnej nie później niż na 15 dni przed terminem rozpoczęcia sesji egzaminacyjnej.

Osoba dopuszczona do egzaminów eksternistycznych zdaje egzaminy w okresie nie dłuższym niż 3 lata. W uzasadnionych wypadkach, na wniosek zdającego, dyrektor komisji okręgowej może przedłużyć okres zdawania egzaminów eksternistycznych o dwie sesje egzaminacyjne. Dyrektor komisji okręgowej na wniosek osoby, która w okresie nie dłuższym niż 3 lata od upływu okresu zdawania ponownie ubiega się o przystąpienie do egzaminów eksternistycznych, zalicza tej osobie egzaminy eksternistyczne zdane w wyżej wymienionym okresie.

Osoba dopuszczona do egzaminów eksternistycznych, nie później niż na 30 dni przed terminem rozpoczęcia sesji egzaminacyjnej, składa dyrektorowi komisji okręgowej:

1) pisemną informację wskazującą przedmioty, z zakresu których zamierza zdawać egzaminy eksternistyczne w danej sesji egzaminacyjnej,

2) dowód wniesienia opłaty za egzaminy eksternistyczne z zakresu zajęć edukacyjnych albo wniosek o zwolnienie z opłaty.



Zdający może, w terminie 2 dni od dnia przeprowadzenia egzaminu eksternistycznego z danych zajęć edukacyjnych, zgłosić zastrzeżenia do dyrektora komisji okręgowej, jeżeli uzna, że w trakcie egzaminu zostały naruszone przepisy dotyczące jego przeprowadzania. Dyrektor komisji okręgowej rozpatruje zastrzeżenia w terminie 7 dni od dnia ich otrzymania. Rozstrzygnięcie dyrektora komisji okręgowej jest ostateczne.

W przypadku naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzania egzaminu eksternistycznego, jeżeli naruszenie to mogło mieć wpływ na wynik egzaminu, dyrektor komisji okręgowej, w porozumieniu z dyrektorem Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, ma prawo unieważnić egzamin eksternistyczny z danych zajęć edukacyjnych i zarządzić jego ponowne przeprowadzenie w następnej sesji egzaminacyjnej. Unieważnienie egzaminu może dotyczyć poszczególnych lub wszystkich zdających.

Na wniosek zdającego sprawdzony i oceniony arkusz egzaminacyjny oraz karta punktowania są udostępniane zdającemu do wglądu w miejscu i czasie określonych przez dyrektora komisji okręgowej.

### **I.3. Zasady dostosowania warunków i formy przeprowadzania egzaminu dla zdających z dysfunkcjami**

Osoby niewidome, słabowidzące, niesłyszące, słabosłyszące, z niepełnosprawnością ruchową, w tym z afazją, z upośledzeniem umysłowym w stopniu lekkim lub z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera, przystępują do egzaminów eksternistycznych w warunkach i formie dostosowanych do rodzaju ich niepełnosprawności. Osoby te zobowiązane są przedstawić zaświadczenie wydane przez lekarza i potwierdzające występowanie danej dysfunkcji.

Dyrektor Centralnej Komisji Egzaminacyjnej opracowuje szczegółową informację o sposobach dostosowania warunków i formy przeprowadzania egzaminów eksternistycznych do potrzeb i możliwości wyżej wymienionych osób i podaje ją do publicznej wiadomości na stronie internetowej CKE, nie później niż do dnia 1 września roku poprzedzającego rok, w którym są przeprowadzane egzaminy eksternistyczne.

Na podstawie wydanego przez lekarza zaświadczenia potwierdzającego występowanie danej dysfunkcji oraz zgodnie ze szczegółową informacją, o której mowa powyżej, dyrektor komisji okręgowej (lub upoważniona przez niego osoba) wskazuje sposób lub sposoby dostosowania

warunków i formy przeprowadzania egzaminu eksternistycznego do potrzeb i możliwości osoby z dysfunkcją/dysfunkcjami przystępującej do egzaminu eksternistycznego. Wyżej wymienione zaświadczenie przedkłada się dyrektorowi komisji okręgowej wraz z wnioskiem o dopuszczenie do egzaminów.

Zdający, który jest chory, może w czasie trwania egzaminu eksternistycznego korzystać ze sprzętu medycznego i leków koniecznych do stosowania w danej chorobie.

## II WYMAGANIA EGZAMINACYJNE

### II.1. Wiadomości wstępne

Zakres wiadomości i umiejętności sprawdzanych na egzaminie eksternistycznym wyznaczają wymagania ogólne i szczegółowe z zakresu podstawowego dla IV etapu edukacyjnego, określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego, wprowadzonej rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 30 sierpnia 2012 r., poz. 977). Zgodnie z zapisami w podstawie programowej, podczas kształcenia w liceum ogólnokształcącym wymaga się wiadomości i umiejętności nabytych nie tylko na IV etapie kształcenia, lecz także na wcześniejszych etapach edukacyjnych zamieszczone w przykładowym arkuszu egzaminacyjnym – rozdz. IV informatora).

### II.2. Wymagania

Wiadomości i umiejętności przewidziane dla uczących się w liceum ogólnokształcącym opisano w podstawie programowej – zgodnie z ideą europejskich ram kwalifikacji – w języku efektów kształcenia<sup>1</sup>. Cele kształcenia sformułowano w języku wymagań ogólnych, a treści nauczania oraz oczekiwane umiejętności uczących się wyrażono w języku wymagań szczegółowych.

#### II.2.1. Cele kształcenia – wymagania ogólne z przedmiotu *matematyka* w liceum ogólnokształcącym

##### I. Wykorzystanie i tworzenie informacji

Zdający interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.

---

<sup>1</sup> Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady Europy z dnia 23 kwietnia 2008 r. w sprawie ustanowienia europejskich ram kwalifikacji dla uczenia się przez całe życie (2008/C111/01).

## II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

## III. Modelowanie matematyczne

Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

## IV. Użycie i tworzenie strategii

Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

## V. Rozumowanie i argumentacja

Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

### **II.2.2. Treści nauczania – wymagania szczegółowe z przedmiotu *matematyka* w liceum ogólnokształcącym**

#### 1. Liczby rzeczywiste. Zdający:

- 1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamek zwykłego, ułamek dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);
- 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);
- 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;
- 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- 5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);
- 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;
- 7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;
- 8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

#### 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:

- 1) używa wzorów skróconego mnożenia na  $(a \pm b)^2$  oraz  $a^2 - b^2$ .

#### 3. Równania i nierówności. Zdający:

- 1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;
- 2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;
- 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;

- 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu  $x^3 = -8$ ;
- 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu  $x(x+1)(x-7) = 0$ ;
- 8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych,

np.  $\frac{x+1}{x+3} = 2$  ,  $\frac{x+1}{x} = 2x$  .

#### 4. Funkcje. Zdający:

- 1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;
- 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;
- 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- 4) na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  szkicuje wykresy funkcji  $y = f(x+a)$ ,  $y = f(x) + a$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ ;
- 5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;
- 7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);
- 11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- 13) szkicuje wykres funkcji  $f(x) = a/x$  dla danego  $a$ , korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
- 14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- 15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

#### 5. Ciągi. Zdający:

- 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 3) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 4) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

#### 6. Trygonometria. Zdający:

- 1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ ;
- 2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);

4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  oraz  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

7. Planimetria. Zdający:

- 1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;
- 2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
- 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;
- 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

- 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- 5) wyznacza współrzędne środka odcinka;
- 6) oblicza odległość dwóch punktów;
- 7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

9. Stereometria. Zdający:

- 1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;
- 2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;
- 3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;
- 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający:

- 1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;
- 2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;
- 3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

### III OPIS EGZAMINU

#### III.1. Forma i zakres egzaminu

Egzamin eksternistyczny z zakresu liceum ogólnokształcącego z przedmiotu *matematyka* jest egzaminem pisemnym, sprawdzającym wiadomości i umiejętności określone w podstawie programowej, przytoczone w rozdziale II *Wymagania egzaminacyjne* niniejszego informatora. Osoba przystępująca do egzaminu rozwiązuje zadania zawarte w jednym arkuszu egzaminacyjnym.

#### III.2. Czas trwania egzaminu

Egzamin trwa **120** minut.

#### III.3. Arkusz egzaminacyjny

Na egzaminie eksternistycznym z matematyki z zakresu liceum ogólnokształcącego dla dorosłych sprawdza się, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania z matematyki w zakresie określonym podstawą programową kształcenia ogólnego dla IV etapu edukacyjnego. Poszczególne zadania zestawu egzaminacyjnego mogą też, w myśl zasady kumulatorywności przyjętej w podstawie, odnosić się do wymagań przypisanych do etapów wcześniejszych (I, II oraz III).

Podstawa programowa dzieli wymagania na ogólne i szczegółowe oraz wyodrębnia te, które powinny być zrealizowane na poziomie podstawowym i poziomie rozszerzonym. Na egzaminie eksternistycznym obowiązują **wymagania na poziomie podstawowym**. Wymagania szczegółowe nie są, jak to bywało w przeszłości, bardzo ogólnymi hasłami odnoszącymi się do szerokich obszarów wiedzy, lecz odwołują się do ściśle określonych wiadomości i umiejętności.

Arkusz egzaminacyjny składa się z czterech grup zadań.

- I. grupa zawiera 15–20 zadań zamkniętych. Dla każdego z tych zadań są podane cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0–1. Zdający wskazuje właściwą odpowiedź, zaznaczając swoją decyzję w arkuszu.

- II. grupa zawiera 2 zadania typu prawda/fałsz, w których zdający stwierdza prawdziwość (lub fałszywość) zdań zawartych w zadaniu. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0–4 lub 0–5.
- III. grupa zawiera 2–3 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi. Zdający zapisuje krótkie uzasadnienie swojej odpowiedzi. Zadania z tej grupy punktowane są w skali 0–2 lub 0–3.
- IV. grupa zawiera 1–2 zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Zadania te wymagają starannego zaplanowania strategii rozwiązania oraz przedstawienia sposobu rozumowania i są punktowane w skali 0–4 lub 0–5.

W arkuszu egzaminacyjnym obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.

#### **III.4. Zasady rozwiązywania i zapisu rozwiązań**

Zdający rozwiązuje zadania bezpośrednio w arkuszu egzaminacyjnym.

Ostatnia strona arkusza egzaminacyjnego jest przeznaczona na brudnopis.

#### **III.5. Zasady sprawdzania i oceniania arkusza egzaminacyjnego**

Za organizację procesu sprawdzania i oceniania arkuszy egzaminacyjnych odpowiadają okręgowe komisje egzaminacyjne. Rozwiązania zadań przez zdających sprawdzają i oceniają zewnątrzni egzaminatorzy powoływani przez dyrektora właściwej okręgowej komisji egzaminacyjnej.

Rozwiązania zadań oceniane są przez egzaminatorów na podstawie szczegółowych kryteriów jednolitych w całym kraju.

Ocenie podlegają tylko te fragmenty pracy, które dotyczą pytań/poleceń. Komentarze, nawet poprawne, wykraczające poza zakres pytań/poleceń, nie podlegają ocenie.

W zadaniach krótkiej odpowiedzi, za które można przyznać tylko jeden punkt, przyznaje się go wyłącznie za odpowiedź w pełni poprawną; jeśli podano więcej odpowiedzi (argumentów, cech, danych itp.), niż wynika to z polecenia w zadaniu, to ocenie podlega tyle kolejnych odpowiedzi (liczonych od pierwszej), o ilu mówi polecenie.

Jeśli w zadaniu krótkiej odpowiedzi, oprócz poprawnej odpowiedzi, dodatkowo podano odpowiedź (informację) błędną, sprzeczną z odpowiedzią poprawną, za rozwiązanie zadania nie przyznaje się punktów.



Zapisy w brudnopisie nie są oceniane.

Zadania egzaminacyjne ujęte w arkuszach egzaminacyjnych są oceniane w skali punktowej.

Wyniki egzaminów eksternistycznych z poszczególnych przedmiotów są wyrażane w stopniach według skali stopni szkolnych – od 1 do 6. Przeliczenia liczby punktów uzyskanych na egzaminie eksternistycznym z danego przedmiotu na stopień szkolny dokonuje się w następujący sposób:

- stopień celujący (6) – od 93% do 100% punktów;
- stopień bardzo dobry (5) – od 78% do 92% punktów;
- stopień dobry (4) – od 62% do 77% punktów;
- stopień dostateczny (3) – od 46% do 61% punktów;
- stopień dopuszczający (2) – od 30% do 45% punktów;
- stopień niedostateczny (1) – poniżej 30% punktów.

Wyniki egzaminów eksternistycznych z poszczególnych zajęć edukacyjnych ustala komisja okręgowa na podstawie liczby punktów przyznanych przez egzaminatorów sprawdzających i oceniających dany arkusz egzaminacyjny.

Zdający zdał egzamin eksternistyczny z danego przedmiotu, jeżeli uzyskał z tego egzaminu ocenę wyższą od niedostatecznej.

Wynik egzaminu – wyrażony w skali stopni szkolnych – odnotowuje się na świadectwie ukończenia szkoły wydawanym przez właściwą okręgową komisję egzaminacyjną.

## **IV PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY**

W tym rozdziale prezentujemy **przykładowy** arkusz egzaminacyjny. Zawiera on instrukcję dla zdającego oraz zestaw zadań egzaminacyjnych.

W rozdziale V informatora zamieszczono przykładowe odpowiedzi zdających, kryteria oceniania zadań oraz komentarze.

Arkuszy zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

Układ graficzny  
© CKE 2013

PESEL (wpisuje zdający)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



**LMA-A1-153**

# EGZAMIN EKSTERNISTYCZNY Z MATEMATYKI

## LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

**Czas pracy 120 minut**

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1–25). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
4. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
5. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
6. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla, linijki oraz kalkulatora.
7. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
8. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj  pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
9. Pamiętaj, że w przypadku stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań egzaminacyjnych lub zakłócania prawidłowego przebiegu egzaminu w sposób, który utrudnia pracę pozostałym osobom zdającym, przewodniczący zespołu nadzorującego przerywa i unieważnia egzamin eksternistyczny.

***Życzymy powodzenia!***

**W zadaniach od 1. do 20. wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.**

**Zadanie 1. (1 pkt)**

Liczba  $(2 - \sqrt{3})^2$  jest równa

- A. 1                      B.  $7 - 4\sqrt{3}$                       C. 7                      D.  $1 - 4\sqrt{3}$

**Zadanie 2. (1 pkt)**

Wskaż liczbę, której zaokrąglenie do jednośc jest równe 541, a zaokrąglenie do części dziesiątych jest równe 540,6.

- A. 540,5619                      B. 540,6619                      C. 541,5619                      D. 541,6059

**Zadanie 3. (1 pkt)**

Cena jednorazowego biletu MPK wzrosła z 2,50 zł do 2,90 zł. Cena tego biletu wzrosła o

- A. mniej niż 5%.  
 B. więcej niż 5%, ale mniej niż 10%.  
 C. więcej niż 10%, ale mniej niż 15%.  
 D. więcej niż 15%.

**Zadanie 4. (1 pkt)**

Dla każdych liczb  $a$  i  $b$  różnych od zera wyrażenie  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4^2 \cdot a^5 \cdot b^4}{4^3 \cdot a^3 \cdot b^5}$  jest równe

- A.  $\frac{1}{8} a^{-2} \cdot b$                       B.  $8a^{-2} \cdot b$                       C.  $\frac{1}{8} a^2 \cdot b^{-1}$                       D.  $8a^2 \cdot b^{-1}$

**Zadanie 5. (1 pkt)**

Liczba  $6 - \log_3 9$  jest równa

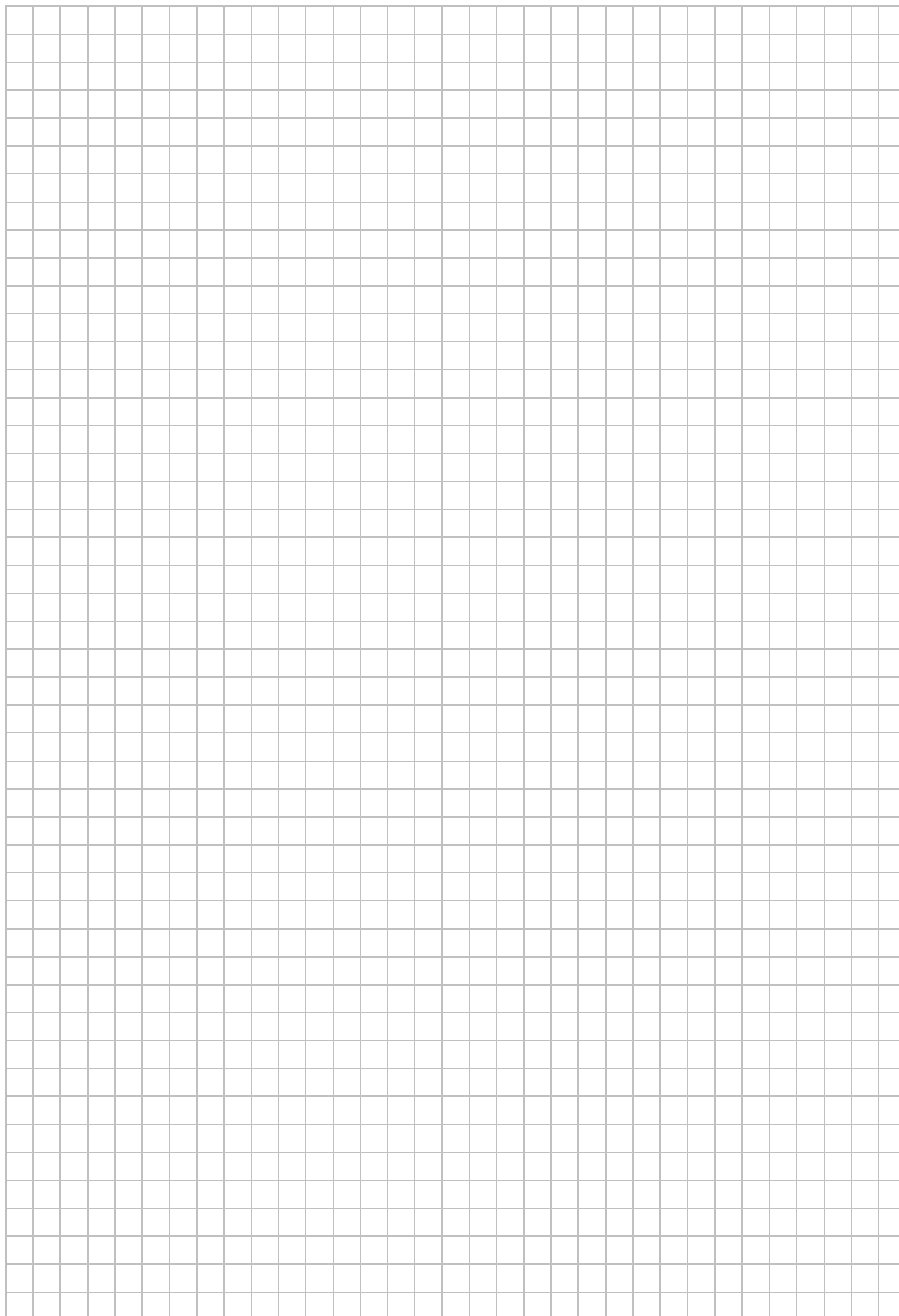
- A. -3                      B. 0                      C. 3                      D. 4

**Zadanie 6. (1 pkt)**

Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o obwodzie 16. Długość jednego z boków prostokąta oznaczamy literą  $a$ . Pole  $P$  tego prostokąta, w zależności od  $a$ , jest określone wzorem

- A.  $P(a) = a(16 - a)$   
 B.  $P(a) = a(8 + a)$   
 C.  $P(a) = a(8 - a)$   
 D.  $P(a) = a(4 - a)$

## BRUDNOPIS



**Zadanie 7. (1 pkt)**

Wskaż liczbę  $a$ , dla której wyrażenie  $x^2+5x+a$ , dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , jest kwadratem sumy dwóch wyrażeń.

- A.  $a = 0$                       B.  $a = 5$                       C.  $a = \frac{5}{2}$                       D.  $a = \frac{25}{4}$

**Zadanie 8. (1 pkt)**

Wskaż  $m$ , dla którego ułamek  $\frac{17}{m}$  jest większy od  $-2$ .

- A.  $m = -9$                       B.  $m = -8$                       C.  $m = -7$                       D.  $m = -6$

**Zadanie 9. (1 pkt)**

Równanie  $(x-2)(x+3)(x^2+25)=0$  ma dokładnie

- A. jedno rozwiązanie rzeczywiste.  
 B. dwa rozwiązania rzeczywiste.  
 C. trzy rozwiązania rzeczywiste.  
 D. cztery rozwiązania rzeczywiste.

**Zadanie 10. (1 pkt)**

Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = -6(x+9)(x-5)$ . Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie.

- A.  $(-\infty, -9)$                       B.  $(-9, 5)$                       C.  $(-5, 9)$                       D.  $(5, +\infty)$

**Zadanie 11. (1 pkt)**

Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$  określony dla  $n \geq 1$ , w którym suma dwóch początkowych wyrazów jest równa  $S_2 = 4$  i drugi wyraz jest równy  $a_2 = 1$ . Iloraz  $q$  tego ciągu jest równy

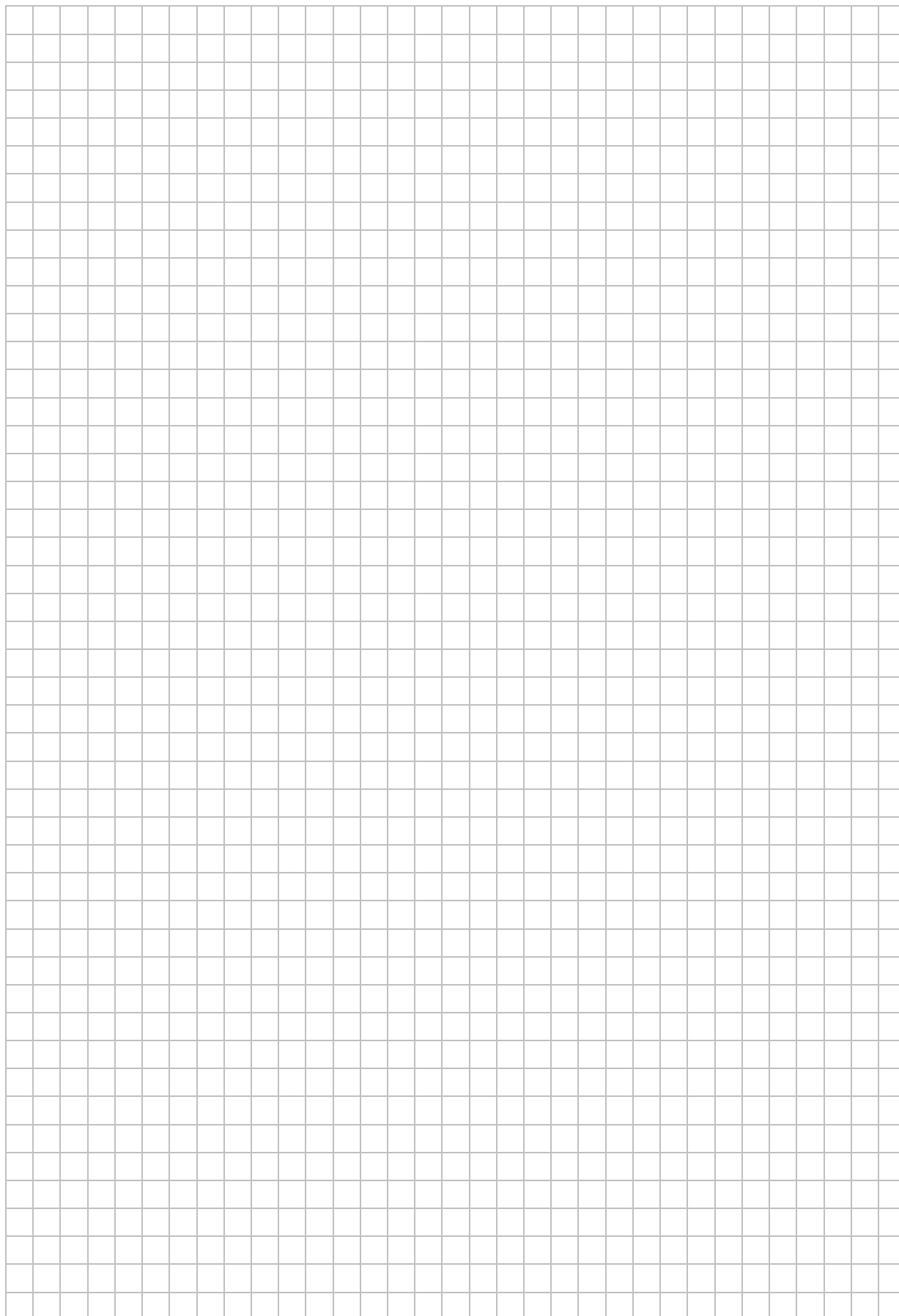
- A.  $q = \frac{1}{4}$                       B.  $q = \frac{1}{3}$                       C.  $q = 3$                       D.  $q = 4$

**Zadanie 12. (1 pkt)**

W trójkącie prostokątnym kąt  $\alpha$  jest ostry oraz  $\sin \alpha = \cos \alpha$ . Tangens kąta  $\alpha$  jest równy

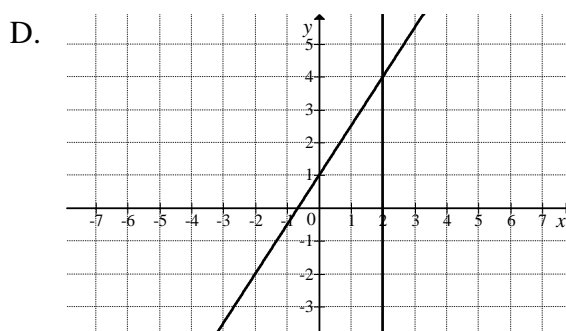
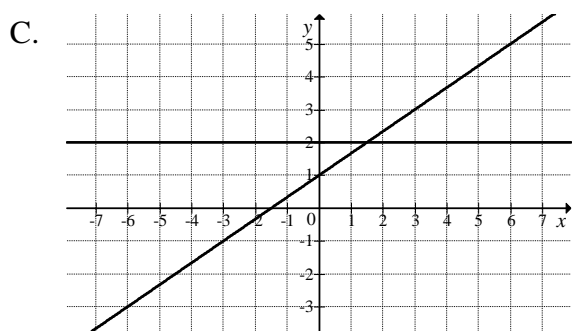
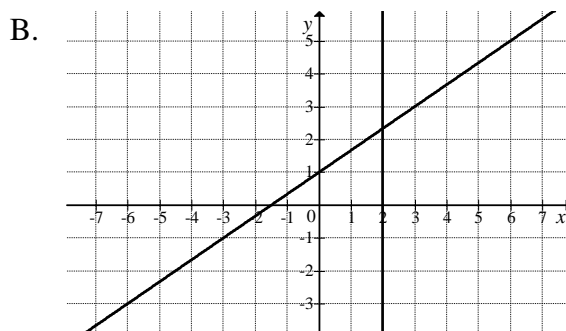
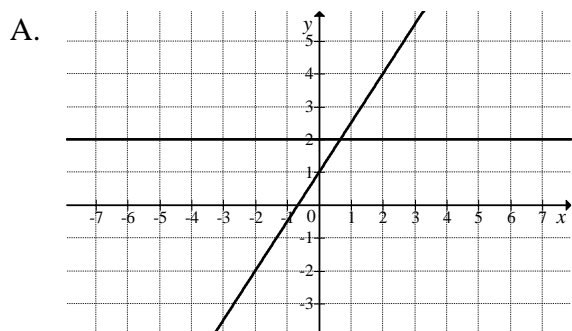
- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $1$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

## BRUDNOPIS



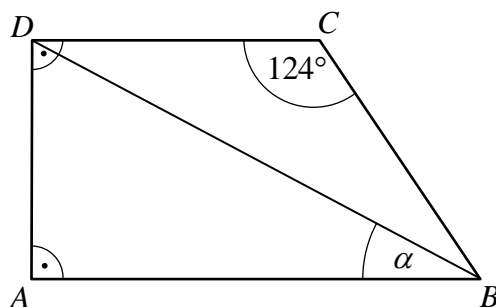
**Zadanie 13. (1 pkt)**

Wskaż rysunek, na którym przedstawiono graficzną ilustrację układu równań  $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ .



**Zadanie 14. (1 pkt)**

Dany jest trapez prostokątny  $ABCD$ , w którym ramię  $BC$  ma taką samą długość jak krótsza podstawa  $CD$  i tworzy z nią kąt  $124^\circ$  (zobacz rysunek).



Kąt ostry między przekątną  $BD$  a podstawą  $AB$  jest równy

- A.  $\alpha = 22^\circ$       B.  $\alpha = 24^\circ$       C.  $\alpha = 26^\circ$       D.  $\alpha = 28^\circ$

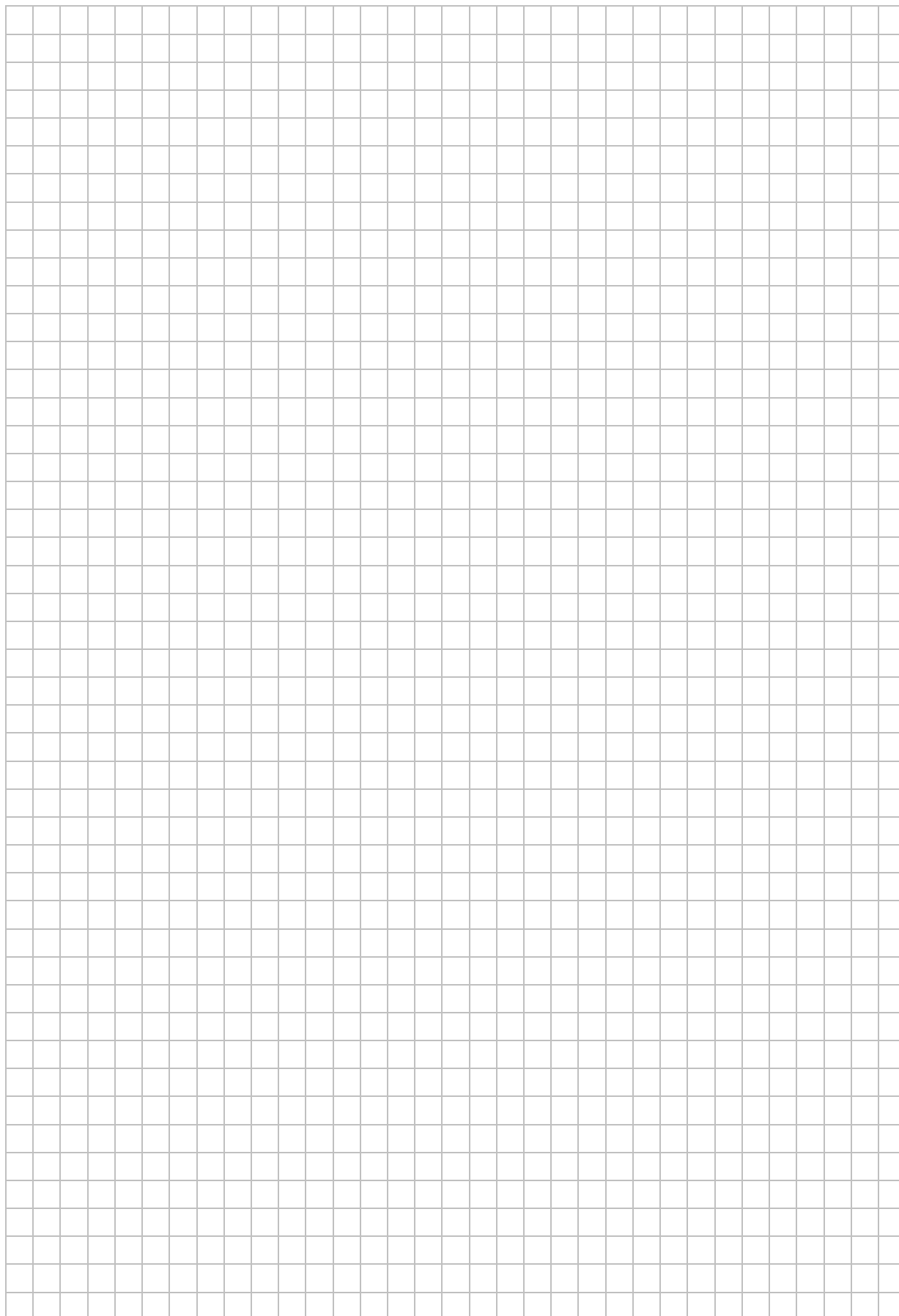
**Zadanie 15. (1 pkt)**

Obwód rombu jest równy 16, a długość krótszej przekątnej jest równa długości boku rombu. Pole tego rombu jest równe

- A.  $4\sqrt{3}$       B.  $8\sqrt{3}$       C.  $16\sqrt{3}$       D.  $32\sqrt{3}$

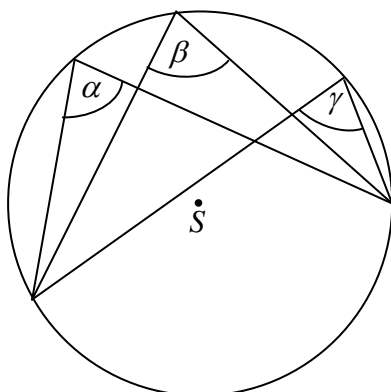


## BRUDNOPIS



**Zadanie 16. (1 pkt)**

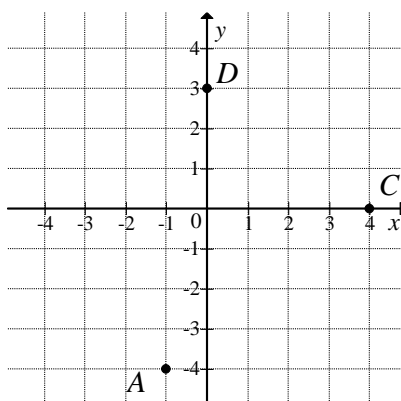
Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są wpisane w okrąg o środku w punkcie  $S$  (zobacz rysunek). Wtedy



- A.  $\alpha > \beta$                       B.  $\alpha > \gamma$                       C.  $\beta < \gamma$                       D.  $\alpha = \beta = \gamma$

**Zadanie 17. (1 pkt)**

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono trzy spośród pięciu wierzchołków pięciokąta  $ABCDE$ , którego osią symetrii jest oś  $Oy$  układu współrzędnych.



Długość boku  $BC$  tego pięciokąta jest równa

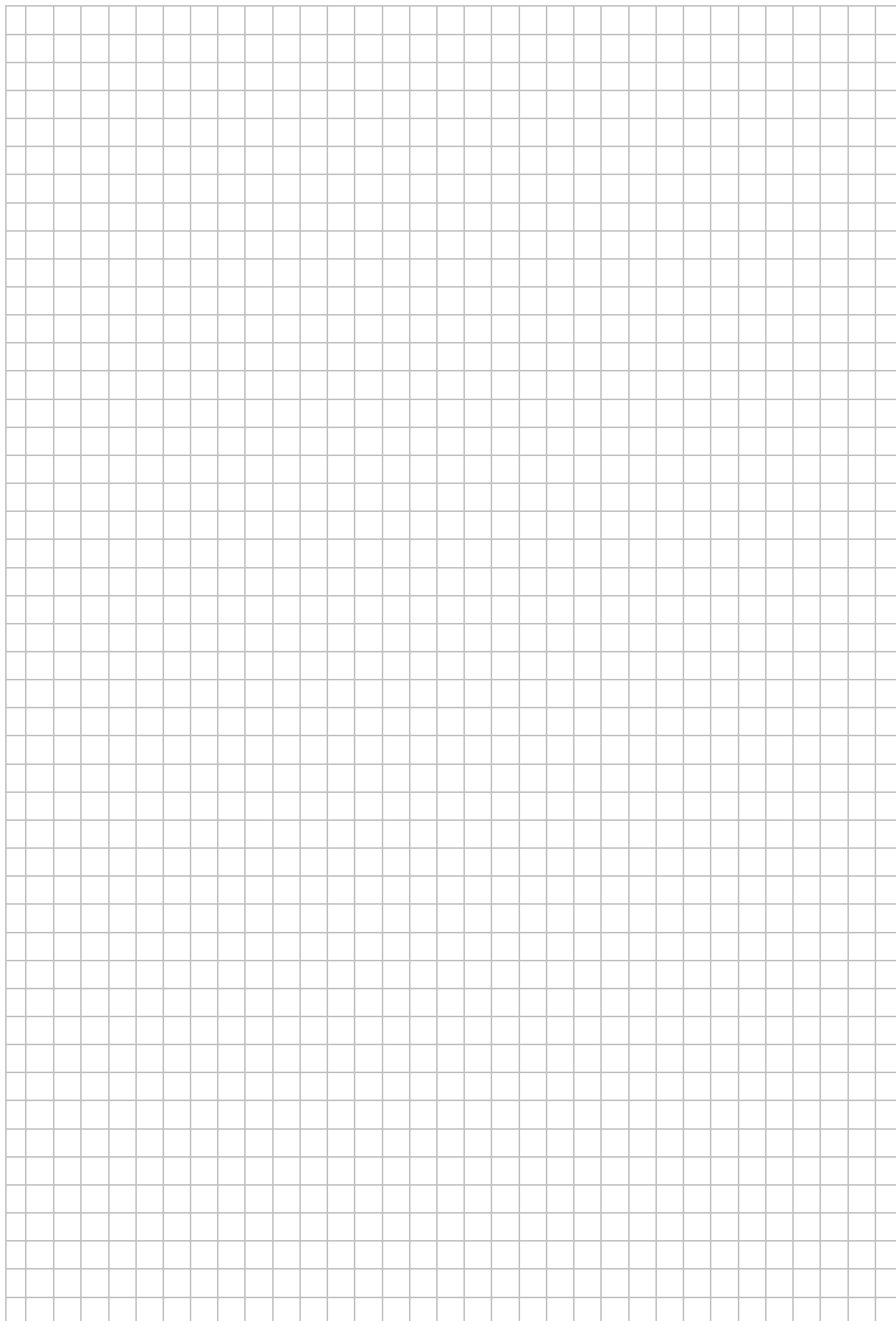
- A.  $\sqrt{7}$                       B. 4                      C. 5                      D.  $\sqrt{41}$

**Zadanie 18. (1 pkt)**

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwa razy orła jest równe

- A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{3}{8}$                       D.  $\frac{1}{2}$

## BRUDNOPIS



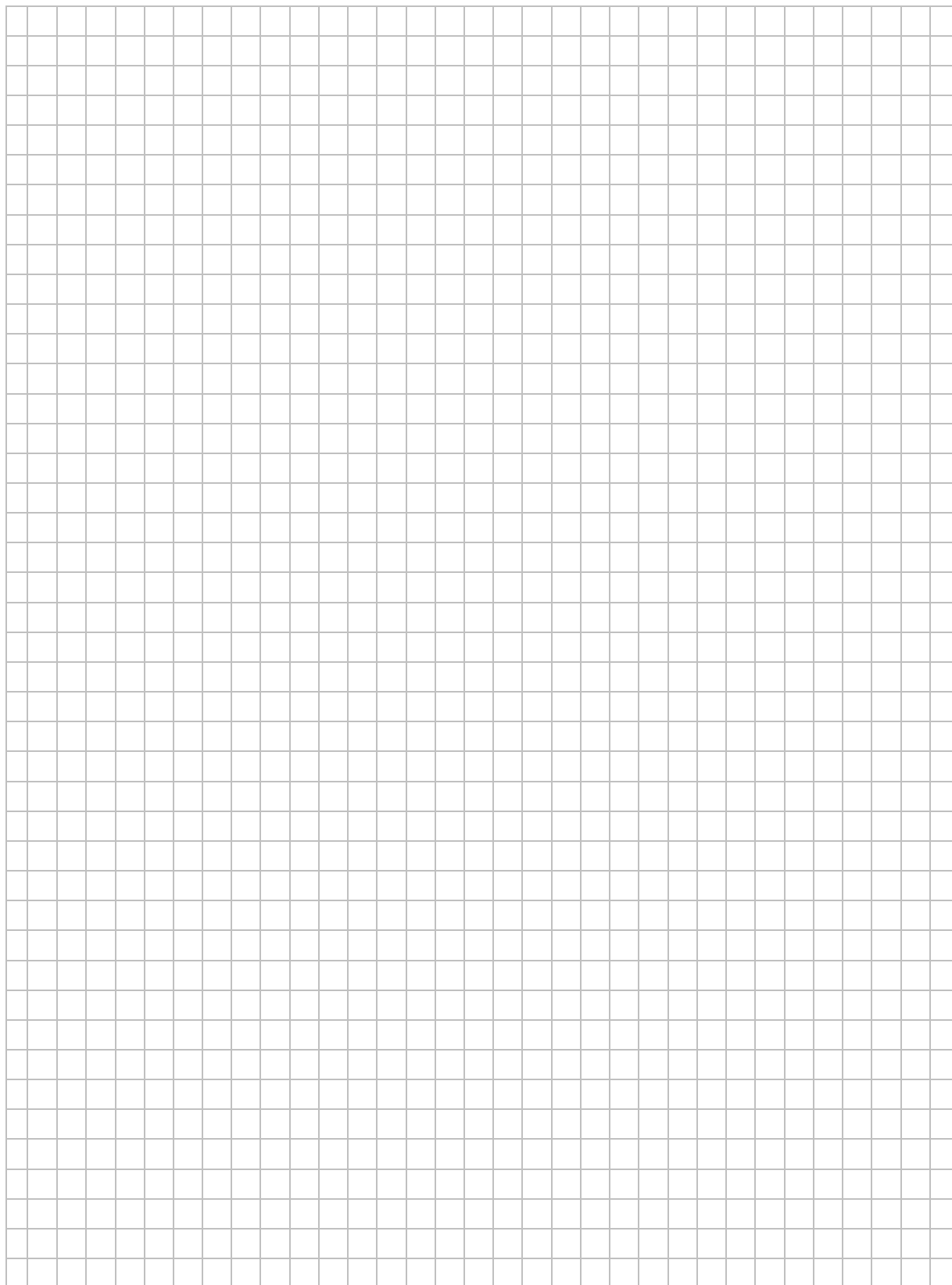






**Zadanie 23. (3 pkt)**

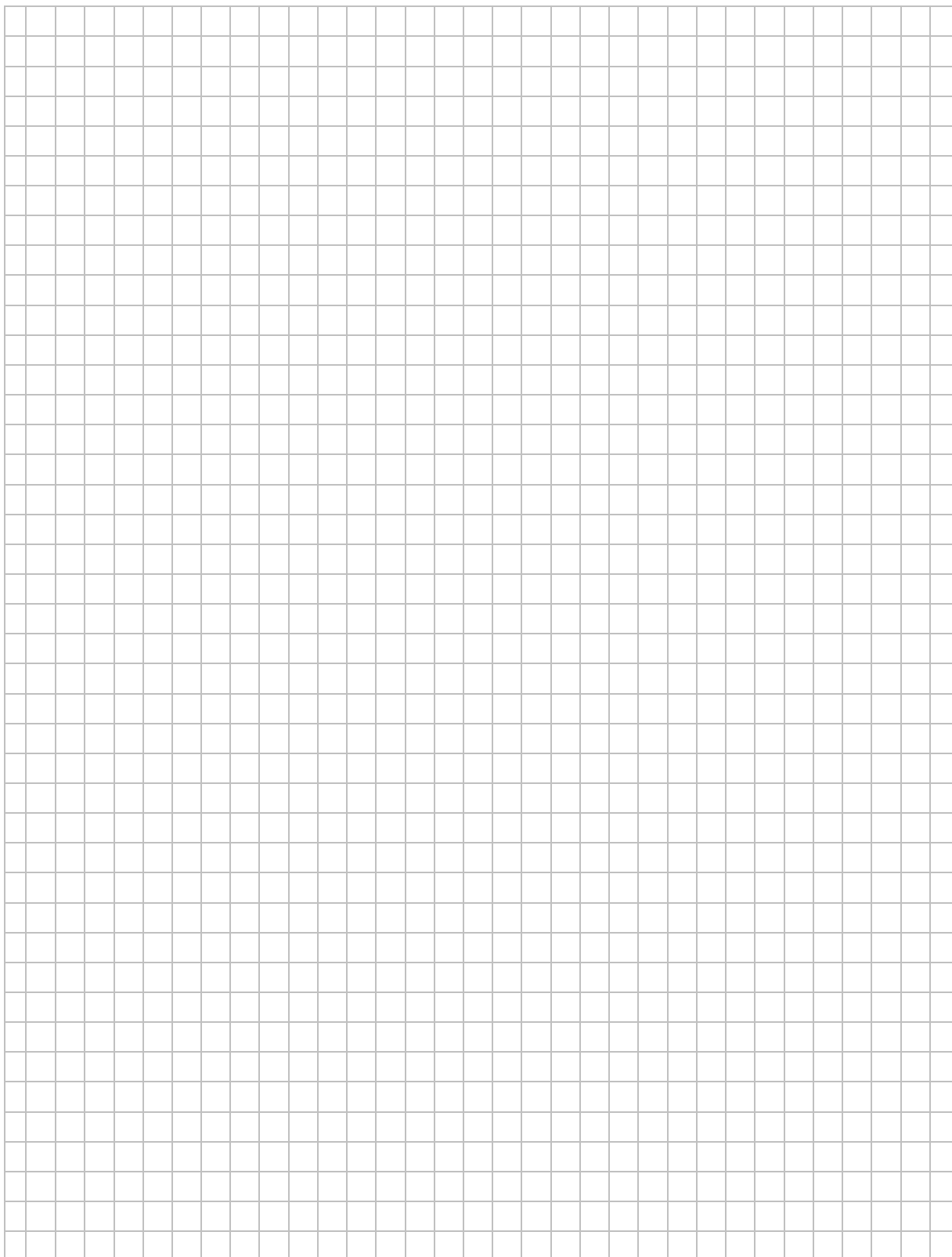
Rozwiąż nierówność  $4x^2 + 8x - 21 \leq 0$ .



Odpowiedź: .....

**Zadanie 24. (3 pkt)**

Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określono wzorem  $a_n = 53 - 3n$  dla  $n \geq 1$ . Oblicz pierwszy wyraz  $a_1$  i różnicę  $r$  tego ciągu.



Odpowiedź: .....



**Zadanie 25. (4 pkt)**

Cena biletu ulgowego stanowi 75% ceny biletu normalnego. Za dwa bilety normalne i trzy ulgowe pięciosobowa rodzina zapłaciła 153 zł. Oblicz cenę biletu normalnego i cenę biletu ulgowego.



Odpowiedź: .....

## **BRUDNOPIS**

## V PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMIESZCZONYCH W ARKUSZU EGZAMINACYJNYM I ICH OCENA

Uwaga:

Przykładowe wypowiedzi zdających są wiernymi cytatami z arkuszy egzaminacyjnych i mogą zawierać błędy.

### Zadanie 1. (1 pkt)

Liczba  $(2 - \sqrt{3})^2$  jest równa

- A. 1                      B.  $7 - 4\sqrt{3}$                       C. 7                      D.  $1 - 4\sqrt{3}$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
B. $7 - 4\sqrt{3}$	Zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia: $(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$ Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.

### Zadanie 2. (1 pkt)

Wskaż liczbę, której zaokrąglenie do jedności jest równe 541, a zaokrąglenie do części dziesiątych jest równe 540,6.

- A. 540,5619                      B. 540,6619                      C. 541,5619                      D. 541,6059

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
A. 540,5619	Tylko ta liczba spełnia oba warunki jednocześnie: $540,5619 \approx 541$ , gdyż cyfra części dziesiątych spełnia warunek $5 \geq 5$ , $540,5619 \approx 540,6$ , gdyż cyfra części setnych $6 \geq 5$ . Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi A.

### Zadanie 3. (1 pkt)

Cena jednorazowego biletu MPK wzrosła z 2,50 zł do 2,90 zł. Cena tego biletu wzrosła o

- A. mniej niż 5%.
- B. więcej niż 5%, ale mniej niż 10%.
- C. więcej niż 10%, ale mniej niż 15%.
- D. więcej niż 15%.

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
D. więcej niż 15%.	<p><b>I sposób</b></p> <p>Układamy proporcję <math>\begin{matrix} 2,50 &amp; - &amp; 100\% \\ 2,90 &amp; - &amp; x\% \end{matrix}</math>, a stąd</p> $x\% = \frac{2,90 \cdot 100\%}{2,50} = 116\% .$ $116\% - 100\% = 16\%$ <p>Wynika stąd, że cena biletu wzrosła o 16%.</p> <p><b>II sposób</b></p> <p>Wzrost ceny biletu wyrażony w procentach jest równy</p> $\frac{2,90 - 2,50}{2,50} \cdot 100\% = \frac{0,40}{2,50} \cdot 100\% = 16\% .$ <p>Poprawna odpowiedź to D.</p> <p><b>III sposób</b></p> <p><math>2,90 - 2,50 = 0,40</math>, zatem cena wzrosła o 0,40 zł.          10% z 2,50 to 0,25          5% z 2,50 to 0,125, więc 15% z 2,50 to <math>0,375 &lt; 0,40</math>, zatem cena wzrosła o więcej niż 15%</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi D.</p>

### Zadanie 4. (1 pkt)

Dla każdych liczb  $a$  i  $b$  różnych od zera wyrażenie  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4^2 \cdot a^5 \cdot b^4}{4^3 \cdot a^3 \cdot b^5}$  jest równe

- A.  $\frac{1}{8} a^{-2} \cdot b$
- B.  $8a^{-2} \cdot b$
- C.  $\frac{1}{8} a^2 \cdot b^{-1}$
- D.  $8a^2 \cdot b^{-1}$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
C. $\frac{1}{8} a^2 \cdot b^{-1}$	<p>Korzystając z twierdzeń o działaniach na potęgach o tej samej podstawie, wyrażenie <math>\frac{1}{2} \cdot \frac{4^2 \cdot a^5 \cdot b^4}{4^3 \cdot a^3 \cdot b^5}</math> zapisujemy w postaci</p> $\frac{1}{2} \cdot \frac{4^2 \cdot a^5 \cdot b^4}{4^3 \cdot a^3 \cdot b^5} = \frac{1}{2} \cdot 4^{2-3} \cdot a^{5-3} \cdot b^{4-5} = \frac{1}{8} a^2 \cdot b^{-1}$ <p>albo</p> $\frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{4^2} \cdot a^{\cancel{5}^2} \cdot \cancel{b^4}}{\cancel{4^3} \cdot \cancel{a^3} \cdot \cancel{b^5}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^2}{b} = \frac{1}{8} a^2 b^{-1} .$ <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi C.</p>

### Zadanie 5. (1 pkt)

Liczba  $6 - \log_3 9$  jest równa

- A.  $-3$                       B.  $0$                       C.  $3$                       D.  $4$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
D. 4	Z definicji logarytmu obliczamy $\log_3 9 = 2$ , bo $3^2 = 9$ . Zatem $6 - \log_3 9 = 6 - 2 = 4$ . Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi D.

### Zadanie 6. (1 pkt)

Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o obwodzie 16. Długość jednego z boków prostokąta oznaczamy literą  $a$ . Pole  $P$  tego prostokąta w zależności od  $a$  jest określone wzorem

- A.  $P(a) = a(16 - a)$   
 B.  $P(a) = a(8 + a)$   
 C.  $P(a) = a(8 - a)$   
 D.  $P(a) = a(4 - a)$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
C. $P(a) = a(8 - a)$	Niech $b$ oznacza długość drugiego boku prostokąta. Obwód prostokąta jest wtedy równy $2a + 2b = 16$ . Stąd długość drugiego boku jest równa $b = 8 - a$ , więc pole tego prostokąta jest określone wzorem $P(a) = a(8 - a)$ dla $0 < a < 8$ . Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi C.

### Zadanie 7. (1 pkt)

Wskaż liczbę  $a$ , dla której wyrażenie  $x^2 + 5x + a$ , dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , jest kwadratem sumy dwóch wyrażeń.

- A.  $a = 0$                       B.  $a = 5$                       C.  $a = \frac{5}{2}$                       D.  $a = \frac{25}{4}$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
D. $a = \frac{25}{4}$	Wyrażenie $x^2 + 5x + a$ zapisujemy w postaci $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \dots$ , więc brakującym składnikiem jest liczba $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ , czyli $\frac{25}{4}$ . Sprawdzamy: $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi D.

**Zadanie 8. (1 pkt)**

Wskaż  $m$ , dla którego ułamek  $\frac{17}{m}$  jest większy od  $-2$ .

- A.  $m = -9$                       B.  $m = -8$                       C.  $m = -7$                       D.  $m = -6$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
A. $m = -9$	<p>Sprawdzamy, dla której z podanych liczb <math>m</math> ułamek <math>\frac{17}{m}</math> jest większy od <math>-2</math>.</p> <p>Dla <math>m = -9</math> otrzymujemy <math>\frac{17}{-9} = -1\frac{8}{9} &gt; -2</math>.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi A.</p>

**Zadanie 9. (1 pkt)**

Równanie  $(x-2)(x+3)(x^2+25)=0$  ma dokładnie

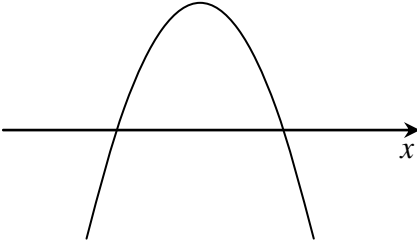
- A. jedno rozwiązanie rzeczywiste.  
 B. dwa rozwiązania rzeczywiste.  
 C. trzy rozwiązania rzeczywiste.  
 D. cztery rozwiązania rzeczywiste.

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
B. dwa rozwiązania rzeczywiste.	<p>Równanie <math>(x-2)(x+3)(x^2+25)=0</math> ma postać iloczynu, zatem <math>x-2=0</math> lub <math>x+3=0</math> lub <math>x^2+25=0</math>.</p> <p>Czynnik <math>x-2</math> przyjmuje wartość 0 tylko wtedy, gdy <math>x=2</math>, czynnik <math>x+3</math> przyjmuje wartość 0 tylko wtedy, gdy <math>x=-3</math>. Zauważamy, że czynnik <math>x^2+25</math> przyjmuje wartość dodatnią dla każdej liczby rzeczywistej <math>x</math>. Zatem równanie <math>(x-2)(x+3)(x^2+25)=0</math> ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.</p>

**Zadanie 10. (1 pkt)**

Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = -6(x+9)(x-5)$ . Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie.

- A.  $(-\infty, -9)$       B.  $(-9, 5)$       C.  $(-5, 9)$       D.  $(5, +\infty)$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
B. $(-9, 5)$	<p>Wykresem funkcji kwadratowej <math>f</math> jest parabola, której ramiona są skierowane do dołu, gdyż współczynnik przy <math>x^2</math> jest ujemny. Z postaci iloczynowej funkcji <math>f</math> odczytujemy jej miejsca zerowe: <math>x_1 = -9</math>, <math>x_2 = 5</math>. Szkicujemy przybliżony kształt wykresu funkcji <math>f</math> i odczytujemy z niego zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.</p>  <p style="text-align: right;"><math>(-9, 5)</math></p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.</p>

**Zadanie 11. (1 pkt)**

Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$  określony dla  $n \geq 1$ , w którym suma dwóch początkowych wyrazów jest równa  $S_2 = 4$  i drugi wyraz jest równy  $a_2 = 1$ . Iloraz  $q$  tego ciągu jest równy

- A.  $q = \frac{1}{4}$       B.  $q = \frac{1}{3}$       C.  $q = 3$       D.  $q = 4$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
B. $q = \frac{1}{3}$	<p>Jeżeli <math>S_2 = 4</math>, czyli <math>S_2 = a_1 + a_2</math> i <math>a_2 = 1</math>, to otrzymujemy <math>4 = a_1 + 1</math> oraz <math>a_1 = 3</math>. Iloraz <math>q</math> tego ciągu jest zatem równy <math>q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}</math>.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.</p>

**Zadanie 12. (1 pkt)**

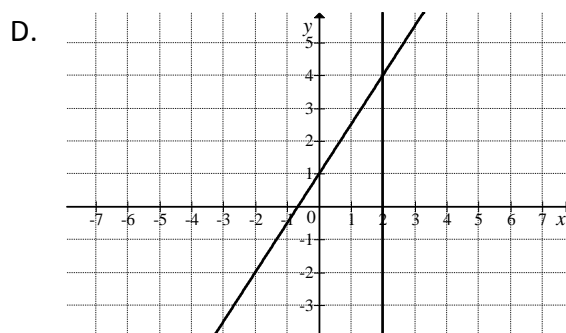
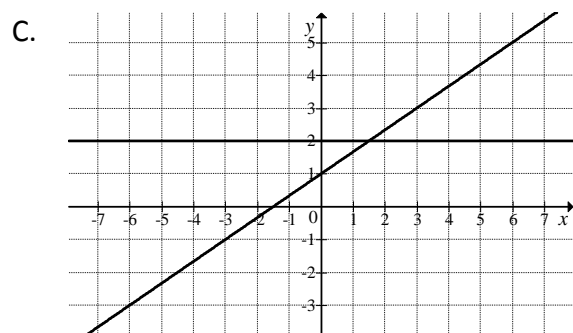
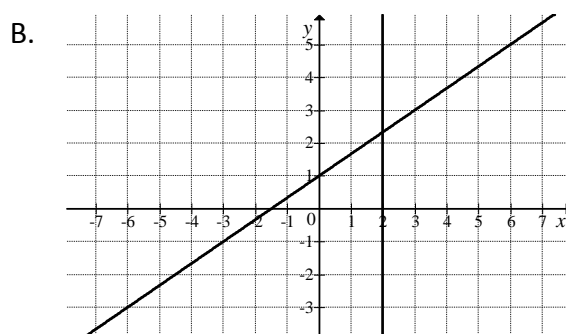
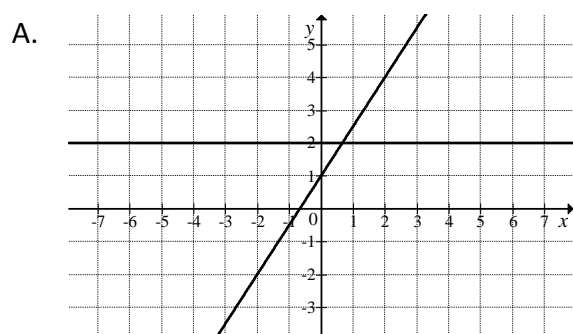
W trójkącie prostokątnym kąt  $\alpha$  jest ostry oraz  $\sin \alpha = \cos \alpha$ . Tangens kąta  $\alpha$  jest równy

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 1                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

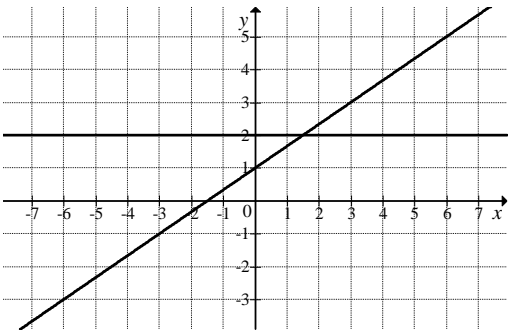
Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
B. $\operatorname{tg} \alpha = 1$	<p><b>I sposób</b> Równość <math>\sin \alpha = \cos \alpha</math> jest prawdziwa dla kąta ostrego <math>\alpha</math> tylko wtedy, gdy <math>\alpha = 45^\circ</math>. Stąd otrzymujemy <math>\operatorname{tg} 45^\circ = 1</math>.</p> <p><b>II sposób</b> Ponieważ kąt <math>\alpha</math> jest ostry możemy obie strony równania <math>\sin \alpha = \cos \alpha</math> podzielić przez <math>\cos \alpha</math>. Otrzymujemy <math>\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1</math>. Korzystając z tożsamości <math>\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}</math>, otrzymujemy <math>\operatorname{tg} \alpha = 1</math>.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.</p>

**Zadanie 13. (1 pkt)**

Wskaż rysunek, na którym przedstawiono graficzną ilustrację układu równań  $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ .

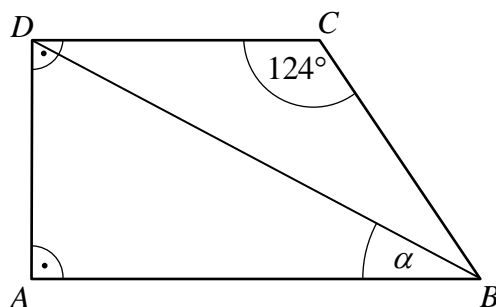




Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
<p>C</p> 	<p>Odpowiedzi B i D odrzucamy, ponieważ występuje tam wykres prostej o równaniu <math>x = 2</math>, a nie <math>y = 2</math>. Po obliczeniu miejsc zerowych funkcji <math>f(x) = \frac{2}{3}x + 1</math> otrzymujemy <math>x = -\frac{3}{2}</math>.</p> <p>Prostą o równaniu <math>y = \frac{2}{3}x + 1</math> przedstawiono na układzie współrzędnych tylko w odpowiedziach B oraz C. Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi C.</p>

### Zadanie 14. (1 pkt)

Dany jest trapez prostokątny  $ABCD$ , w którym ramię  $BC$  ma taką samą długość jak krótsza podstawa  $CD$  i tworzy z nią kąt  $124^\circ$  (zobacz rysunek).



Kąt ostry między przekątną  $BD$  a podstawą  $AB$  jest równy

- A.  $\alpha = 22^\circ$       B.  $\alpha = 24^\circ$       C.  $\alpha = 26^\circ$       D.  $\alpha = 28^\circ$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
<p>D. <math>\alpha = 28^\circ</math></p>	<p>Trójkąt <math>BCD</math> jest równoramienny (z treści zadania), więc kąty przy podstawie <math>BD</math> są równe. Zatem <math> \sphericalangle BDC  = \frac{180^\circ - 124^\circ}{2} = 28^\circ</math>.</p> <p>Kąt <math>\alpha</math> jest równy kątowi <math>BDC</math> (jako kąty naprzemianległe, gdyż podstawy trapezu są równoległe i są przecięte prostą <math>BD</math>), zatem poprawna odpowiedź to D, stąd <math>\alpha = 28^\circ</math>.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi D.</p>

**Zadanie 15. (1 pkt)**

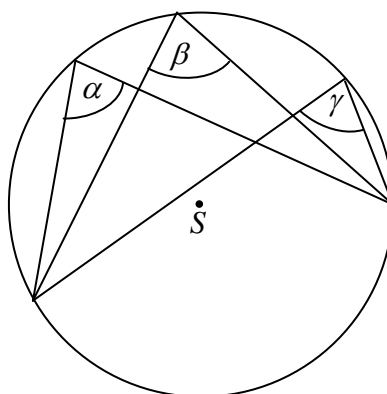
Obwód rombu jest równy 16, a długość krótszej przekątnej jest równa długości boku rombu. Pole tego rombu jest równe

- A.  $4\sqrt{3}$                       B.  $8\sqrt{3}$                       C.  $16\sqrt{3}$                       D.  $32\sqrt{3}$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
B. $8\sqrt{3}$	<p>Romb to czworokąt, który ma wszystkie boki równe. Stąd <math>4a = 16</math>, więc <math>a = 4</math>. Krótsza przekątna rombu ma długość taką samą jak bok rombu, więc ten romb składa się z dwóch trójkątów równobocznych o boku długości 4. Zatem pole tego rombu jest równe (dwa razy pole trójkąta równobocznego)</p> $P_r = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}.$ <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.</p>

**Zadanie 16. (1 pkt)**

Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są wpisane w okrąg o środku w punkcie  $S$  (zobacz rysunek). Wtedy

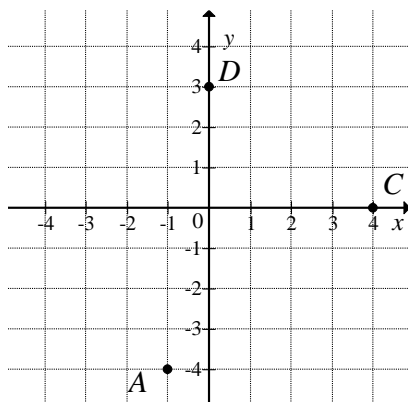


- A.  $\alpha > \beta$                       B.  $\alpha > \gamma$                       C.  $\beta < \gamma$                       D.  $\alpha = \beta = \gamma$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
D. $\alpha = \beta = \gamma$	<p>Kąty <math>\alpha</math>, <math>\beta</math>, <math>\gamma</math> to kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Z twierdzenia o kątach wpisanych w okrąg opartych na tym samym łuku wynika, że kąty <math>\alpha</math>, <math>\beta</math>, <math>\gamma</math> są równe.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi D.</p>

**Zadanie 17. (1 pkt)**

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono trzy spośród pięciu wierzchołków pięciokąta  $ABCDE$ , którego osią symetrii jest oś  $Oy$  układu współrzędnych.



Długość boku  $BC$  tego pięciokąta jest równa

- A.  $\sqrt{7}$                       B. 4                      C. 5                      D.  $\sqrt{41}$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
C. 5	<p>Odcięte punktów symetrycznych względem osi <math>Oy</math> są liczbami przeciwnymi, a rzędne są równe. Symetryczny do punktu <math>A = (-1, -4)</math> jest punkt <math>B = (1, -4)</math>. Zatem długość boku <math>BC</math> jest równa <math> BC  = \sqrt{(4-1)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25} = 5</math>.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi C.</p>

**Zadanie 18. (1 pkt)**

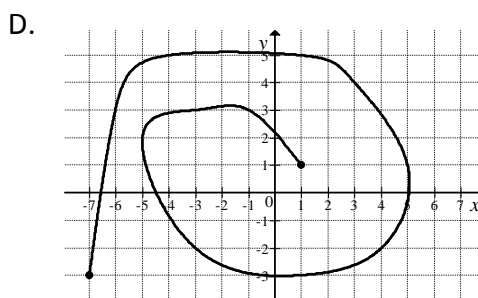
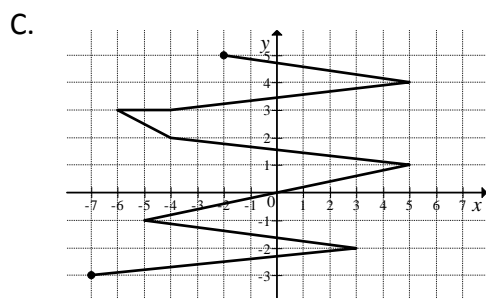
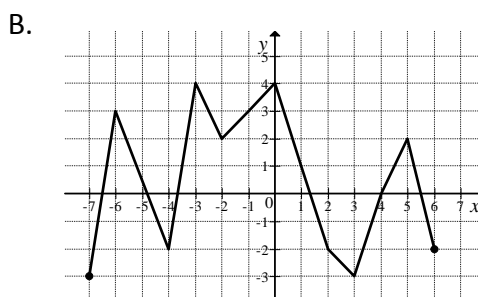
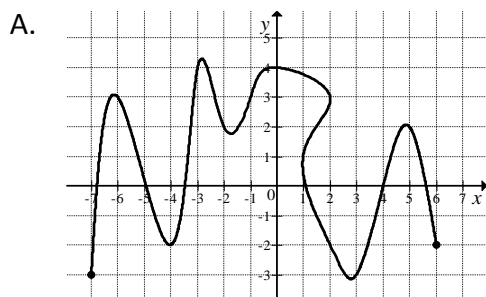
Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwa razy orła jest równe

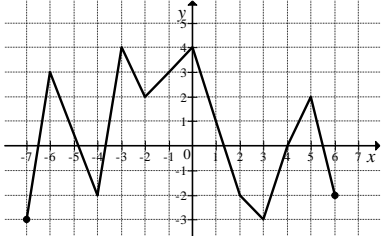
- A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{3}{8}$                       D.  $\frac{1}{2}$

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
C. $\frac{3}{8}$	<p>Rzucamy trzy razy symetryczną monetą, zatem otrzymujemy 8 możliwych wyników tego doświadczenia. Zdarzeń polegających na tym, że otrzymamy dokładnie dwa razy orła, mamy trzy, stąd <math>p = \frac{3}{8}</math>.</p> <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi C.</p>

**Zadanie 19. (1 pkt)**

Wskaż rysunek, na którym przedstawiono wykres funkcji  $y = f(x)$ .



Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
<p>B.</p> 	<p>Funkcją <math>y = f(x)</math> nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi ze zbioru <math>X</math> przyporządkowuje <u>dokładnie jeden</u> element ze zbioru <math>Y</math>. Jeżeli zatem znajdziemy na wykresie co najmniej dwa takie punkty, które mają współrzędną <math>x</math> taką samą, a współrzędne <math>y</math> różne, to wykres <u>nie jest</u> wykresem funkcji. Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi B.</p>

**Zadanie 20. (1 pkt)**

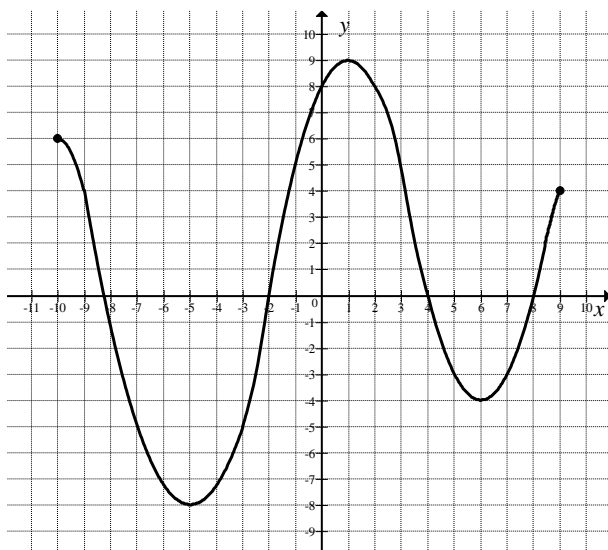
Średnia arytmetyczna sześciu liczb: 17, 21,  $x$ , 27, 29, 31 jest równa  $x$ . Wynika stąd, że liczba  $x$  jest równa

- A. 25                      B. 24                      C. 23                      D. 22

Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania. Ocena rozwiązania.
<p>A. 25</p>	<p>Średnia arytmetyczna sześciu liczb: 17, 21, <math>x</math>, 27, 29, 31 jest równa <math>x</math>. Wynika stąd, że</p> $\frac{17 + 21 + x + 27 + 29 + 31}{6} = x,$ $17 + 21 + x + 27 + 29 + 31 = 6x,$ $x = 25.$ <p>Zdający otrzymuje 1 punkt za zaznaczenie odpowiedzi A.</p>

**Zadanie 21. (5 pkt)**

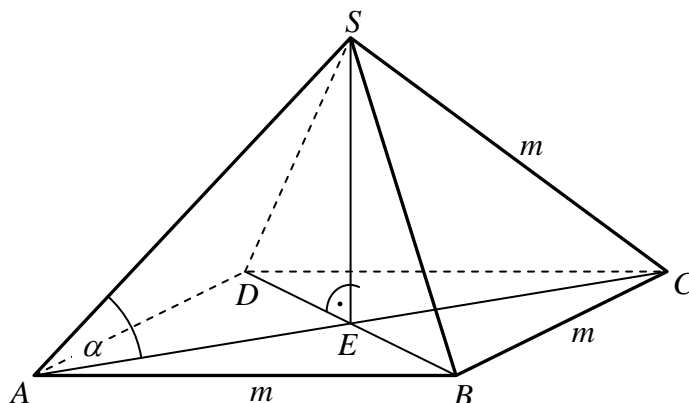
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji  $f$ . W tabeli zapisano pięć zdań. Wpisz w wolną rubrykę literę P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, albo literę F, jeżeli zdanie jest fałszywe.



Zdanie	Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania Ocena rozwiązania
Dziedziną funkcji $f$ jest przedział $\langle -8, 9 \rangle$ .	F	Dziedziną funkcji $f$ jest przedział $\langle -10, 9 \rangle$ .
Funkcja $f$ ma cztery miejsca zerowe.	P	Wykres funkcji $f$ przecina oś $Ox$ w dokładnie czterech punktach.
Wartość funkcji $f$ dla argumentu $x = 3$ jest równa 5.	P	Wartość funkcji $f$ dla argumentu $x = 3$ jest równa 5, bo punkt $(3, 5)$ należy do wykresu funkcji $f$ .
Wykres funkcji $f$ przecina oś $Oy$ w punkcie o współrzędnych $(-2, 0)$ .	F	Wykres funkcji $f$ przecina oś $Oy$ w punkcie $(0, 8)$ . Punkt $(-2, 0)$ leży na osi $Ox$ .
W przedziale $\langle -2, 4 \rangle$ funkcja $f$ jest rosnąca.	F	W przedziale $\langle -2, 4 \rangle$ funkcja $f$ nie jest rosnąca, gdyż w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$ funkcja $f$ jest rosnąca, a w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$ jest malejąca.
Zdający otrzymuje po 1 punkcie za każdą poprawną odpowiedź		

**Zadanie 22. (5 pkt)**

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny  $ABCD S$ , którego każda krawędź ma długość równą  $m$  (zobacz rysunek).



W tabeli zapisano pięć zdań. Wpisz w wolną rubrykę literę P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, albo literę F, jeżeli zdanie jest fałszywe.

Zdanie	Poprawna odpowiedź	Komentarz do zadania Ocena rozwiązania
Trójkąt $ACS$ jest równoboczny.	F	Trójkąt $ACS$ jest równoramienny, ale nie jest równoboczny, gdyż długość podstawy nie jest równa długości ramion: $ BC  = m\sqrt{2} \neq  AS  =  CS  = m$ .
Wysokość ściany bocznej jest równa $\frac{m\sqrt{3}}{2}$ .	P	Ściana boczna jest trójkątem równobocznym o boku długości $m$ , zatem wysokość ściany bocznej jest równa $\frac{m\sqrt{3}}{2}$ .
Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60^\circ$ .	F	<b>I sposób</b> Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 45^\circ$ , gdyż trójkąt $ACS$ jest przystający do trójkąta $ABC$ , który jest „połową” kwadratu $ABCD$ . <b>II sposób</b> Obliczamy kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy: $\cos \alpha = \frac{\frac{m\sqrt{2}}{2}}{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , zatem $\alpha = 45^\circ$ .
Wysokość ostrosłupa jest równa $\frac{m\sqrt{2}}{2}$ .	P	<b>I sposób</b> Wysokość ostrosłupa jest równa $\frac{m\sqrt{2}}{2}$ , gdyż trójkąt $ACS$ jest przystający do trójkąta $ABC$ , który jest „połową” kwadratu $ABCD$ , więc $ SE  =  BE  =  AE  = \frac{m\sqrt{2}}{2}$ .

		<p><b>II sposób</b>                  Obliczamy wysokość ostrosłupa (np. z trójkąta <i>AES</i>):  <math>\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 + H^2 = m^2</math>, zatem  <math>H^2 = m^2 - \frac{m^2}{2} = \frac{m^2}{2}</math>. Stąd <math>H = \frac{m\sqrt{2}}{2}</math>.</p>
Objętość ostrosłupa jest mniejsza niż $\frac{m^3}{3}$ .	P	<p><b>I sposób</b>                  Objętość ostrosłupa jest mniejsza od <math>\frac{m^3}{3}</math>,                  gdyż wysokość ostrosłupa jest mniejsza od długości jego krawędzi bocznej, a więc od <math>m</math>.</p> <p><b>II sposób</b>                  Obliczamy objętość ostrosłupa  <math>V = \frac{1}{3}m^2 \cdot H</math>:  <math>V = \frac{1}{3}m^2 \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2} = \frac{m^3\sqrt{2}}{6} &lt; \frac{m^3}{3}</math>.</p>
Zdający otrzymuje po 1 punkcie za każdą poprawną odpowiedź		

### Zadanie 23. (3 pkt)

Rozwiąż nierówność  $4x^2 + 8x - 21 \leq 0$ .

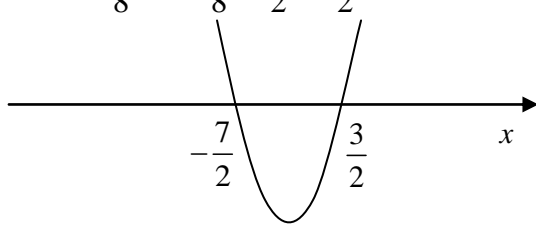
Zdający otrzymuje:

- 0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające rażące błędy merytoryczne.
- 1 punkt za obliczenie wyróżnika trójmianu  $4x^2 + 8x - 21$ :  $\Delta = 400$ .
- 1 punkt za obliczenie pierwiastków trójmianu:  $x_1 = -3\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 1\frac{1}{2}$ .
- 1 punkt za zapisanie zbioru wszystkich rozwiązań nierówności np. w postaci:  
 $-3\frac{1}{2} \leq x \leq 1\frac{1}{2}$  lub  $\left[-3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right]$  lub  $-3\frac{1}{2} \leq x$ ,  $x \leq 1\frac{1}{2}$ .

Zdający	Przykładowe odpowiedzi zdających	Komentarz do zadania Ocena rozwiązania
A	$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 400 = 20^2$ $x_1 = \frac{-8 - 20}{8} = \frac{-28}{8} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$ oraz $x_2 = \frac{-8 + 20}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ .	Zdający A poprawnie obliczył deltę. Obliczył pierwiastki trójmianu kwadratowego bez błędów rachunkowych. Poprawnie podał przedział, w którym trójmian kwadratowy przyjmuje wartości niedodatnie. Zdający otrzymał 3 punkty.

	<p>Odp.: <math>x \in \left\langle -3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2} \right\rangle</math></p>	
B	$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 232$ $x_1 = \frac{-8 - \sqrt{232}}{8} \text{ oraz } x_2 = \frac{-8 + \sqrt{232}}{8}$ <p>Odp.: <math>x \in \left\langle \frac{-8 - \sqrt{232}}{8}, \frac{-8 + \sqrt{232}}{8} \right\rangle</math></p>	<p>Zdający B popełnił błąd rachunkowy w obliczeniach delty, ale poprawnie wstawił odpowiednie dane do wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczył zbiór rozwiązań nierówności. Zdający otrzymał 2 punkty.</p>
C	$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 400 = 20^2$ $x_1 = \frac{8 - 20}{8} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2} \text{ oraz}$ $x_2 = \frac{8 + 20}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ <p>Odp.: <math>x \in \left( -1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2} \right)</math></p>	<p>Zdający C poprawnie obliczył deltę, ale zastosował złe wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego błędnie podał zbiór rozwiązań nierówności. Zdający otrzymał 1 punkt.</p>
D	$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 400 = 20^2$ $x_1 = \frac{-8 - 20}{8} = \frac{-28}{8} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2} \text{ oraz}$ $x_2 = \frac{-8 + 20}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ <p>Odp.: <math>x \in \left\langle -3\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2} \right\rangle</math></p>	<p>Zdający D poprawnie obliczył deltę, odpowiednio zastosował wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego, ale popełnił błąd rachunkowy przy obliczaniu tych pierwiastków i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczył zbiór rozwiązań nierówności. Zdający otrzymał 2 punkty.</p>



E	$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 400 = 20^2$ $x_1 = \frac{-8 - 20}{8} = \frac{-28}{8} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2} \text{ oraz}$ $x_2 = \frac{-8 + 20}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$  <p>Odp.: <math>x \in \left(-\infty, -3\frac{1}{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right).</math></p>	<p>Zdający E poprawnie obliczył deltę. Obliczył pierwiastki trójmianu kwadratowego bez błędów rachunkowych. Błędnie podał przedziały, w których trójmian kwadratowy przyjmuje wartości niedodatnie.</p> <p>Zdający otrzymał 2 punkty.</p>
---	---	---

### Zadanie 24. (3 pkt)

Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określono wzorem  $a_n = 53 - 3n$  dla  $n \geq 1$ . Oblicz pierwszy wyraz  $a_1$  i różnicę  $r$  tego ciągu.

Zdający otrzymuje:

- 0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające rażące błędy merytoryczne
- 1 punkt za obliczenie pierwszego wyrazu  $a_1$ :  $a_1 = 53 - 3 \cdot 1 = 50$ ,
- 1 punkt za obliczenie drugiego lub innego wyrazu ciągu, np.  $a_2$ :  $a_2 = 47$ ,
- 1 punkt za obliczenie różnicy  $r$  tego ciągu:  $r = a_2 - a_1 = 47 - 50 = -3$ .

Zdający	Przykładowe odpowiedzi zdających	Komentarz do zadania Ocena rozwiązania
A	$a_1 = 53 - 3 \cdot 1 = 50$ oraz $a_2 = 53 - 3 \cdot 2 = 47$ . Różnica ciągu: $r = a_2 - a_1 = 47 - 50 = -3$ Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu jest równy $a_1 = 50$ , a różnica tego ciągu jest równa $r = -3$ .	<p>Zdający A poprawnie obliczył pierwszy wyraz ciągu. Poprawnie obliczył drugi wyraz ciągu. Poprawnie obliczył różnicę ciągu. Nie popełnił żadnych błędów rachunkowych.</p> <p>Zdający otrzymał 3 punkty.</p>
B	$a_1 = 53 - 3 \cdot 1 = 50$ $a_2 = 53 - 3 \cdot 2 = 100$ $r = a_2 - a_1 = 100 - 50 = 50$	<p>Zdający B poprawnie obliczył pierwszy wyraz ciągu. Popełnił błąd rachunkowy, gdy obliczał drugi wyraz. Konsekwentnie do popełnionego błędu obliczył różnicę ciągu.</p> <p>Zdający otrzymał 2 punkty.</p>
C	$a_1 = 53 - 3 \cdot 1 = 50$ $a_2 = 53 - 3 \cdot 2 = 47$ Obliczam różnicę ciągu: $r = a_1 - a_2 = 50 - 47 = 3$	<p>Zdający C poprawnie obliczył pierwszy wyraz ciągu. Poprawnie obliczył drugi wyraz ciągu. Jednak gdy obliczał różnicę ciągu, zastosował nieprawidłowy wzór.</p> <p>Zdający C otrzymał 1 punkt.</p>

### Zadanie 25. (4 pkt)

Cena biletu ulgowego stanowi 75% ceny biletu normalnego. Za dwa bilety normalne i trzy ulgowe pięciosobowa rodzina zapłaciła 153 zł. Oblicz cenę biletu normalnego i cenę biletu ulgowego.

Zdający otrzymuje:

- 0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające rażące błędy merytoryczne,
- 1 punkt za przyjęcie oznaczeń, np.:  $x$  – cena biletu normalnego,  $y$  – cena biletu ulgowego, oraz za zapisanie jednego z równań wynikającego z treści zadania, np.:  $y = \frac{75}{100}x = \frac{3}{4}x$  albo  $2x + 3y = 153$ ,
- 1 punkt za zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć cenę biletu normalnego i cenę biletu ulgowego, np.: 
$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 2x + 3y = 153 \end{cases}$$
.

#### Uwaga

Jeżeli zdający ułoży od razu równanie z jedną niewiadomą:  $2x + 3 \cdot \frac{3}{4}x = 153$ , to otrzymuje

2 punkty.

- 1 punkt za obliczenie ceny biletu normalnego: 36 zł,
- 1 punkt za obliczenie ceny biletu ulgowego: 27 zł.

A	<p>Oznaczamy przez <math>x</math> cenę biletu normalnego, a przez <math>y</math> – cenę biletu ulgowego. Ponieważ cena biletu ulgowego stanowi 75% ceny biletu normalnego, to</p> $y = \frac{75}{100}x = \frac{3}{4}x.$ <p>Dwa bilety normalne i trzy ulgowe kosztują razem 153 zł, więc <math>2x + 3y = 153</math>.</p> $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 2x + 3y = 153 \end{cases}$ $2x + 3 \cdot \frac{3}{4}x = 153$ $8x + 9x = 153 \cdot 4$ $17x = 153 \cdot 4$ $x = 9 \cdot 4 = 36$ <p>Obliczamy <math>y = \frac{3}{4} \cdot 36 = 27</math>.</p> <p>Odpowiedź: Cena biletu normalnego jest równa 36 zł, a cena biletu ulgowego wynosi 27 złotych.</p>	<p>Zdający A poprawnie wyraził cenę biletu ulgowego w zależności od ceny biletu normalnego. Poprawnie zapisał układ równań. Poprawnie rozwiązał układ równań i wyznaczył cenę biletu normalnego i ulgowego. Zdający otrzymał 4 punkty.</p>
B	$y = \frac{75}{100}x = \frac{3}{4}x$	<p>Zdający B poprawnie wyraził cenę biletu ulgowego w zależności od ceny biletu normalnego. Poprawnie</p>

	$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 2x + 3y = 153 \end{cases}$ $2x + 3 \cdot \frac{3}{4}x = 153$ $x = 42 \text{ i } y = 31,5$	<p>zapisał układ równań. Jednak gdy rozwiązywał układ, popełnił błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczył ceny biletu normalnego i ulgowego. Zdający otrzymał 3 punkty.</p>
C	$y = \frac{75}{100}x$ $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 3x + 2y = 153 \end{cases}$ $3x + 2 \cdot \frac{3}{4}x = 153$ $4 \frac{1}{2}x = 153$ $x = 153 \cdot \frac{2}{9} = 17 \cdot 2 = 34$ $y = \frac{75}{100} \cdot 34 = 25,5$	<p>Zdający C poprawnie wyraził cenę biletu ulgowego w zależności od ceny biletu normalnego. Jednak gdy układał drugie równanie, pomylił liczby biletów normalnych i ulgowych. Obliczył cenę biletu normalnego i ulgowego, ale w innej sytuacji. Zdający otrzymał 1 punkt.</p>