

MATURA 2010

OSIĄGNIĘCIA MATURZYSTÓW
Z WOJEWÓDZTWA PODLASKIEGO
I WARMIŃSKO-MAZURSKIEGO
W 2010 ROKU - NA PODSTAWIE
WYNIKÓW EGZAMINU MATURALNEGO
Z MATEMATYKI



Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
18-400 Łomża

www.oke.lomza.pl
e-mail: sekretariat@oke.lomza.pl



AUTOR:

Jadwiga Pieczywek

WSPÓŁPRACA:

Przewodniczący Zespołów Egzaminatorów
Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych

PROJEKT OKŁADKI:

Ivayla Świtajewska

1. Opis standardowego arkusza egzaminacyjnego dla poziomu podstawowego

Zestaw składał się z 34 zadań, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać).

Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było sześć zadań dwupunktowych, dwa zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia tabela 1.1

Tabela 1.1 Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu		Liczba punktów	Waga
	Zadania zamknięte	Zadania otwarte		
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3, 5, 6, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25	27, 31	16	32%
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	1, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 19, 20, 21, 22	26	13	26%
3. Modelowanie matematyczne	2	33, 34	10	20%
4. Użycie i tworzenie strategii	4	29, 32	7	14%
5. Rozumowanie i argumentacja		28, 30	4	8%

2. Wyniki zdających

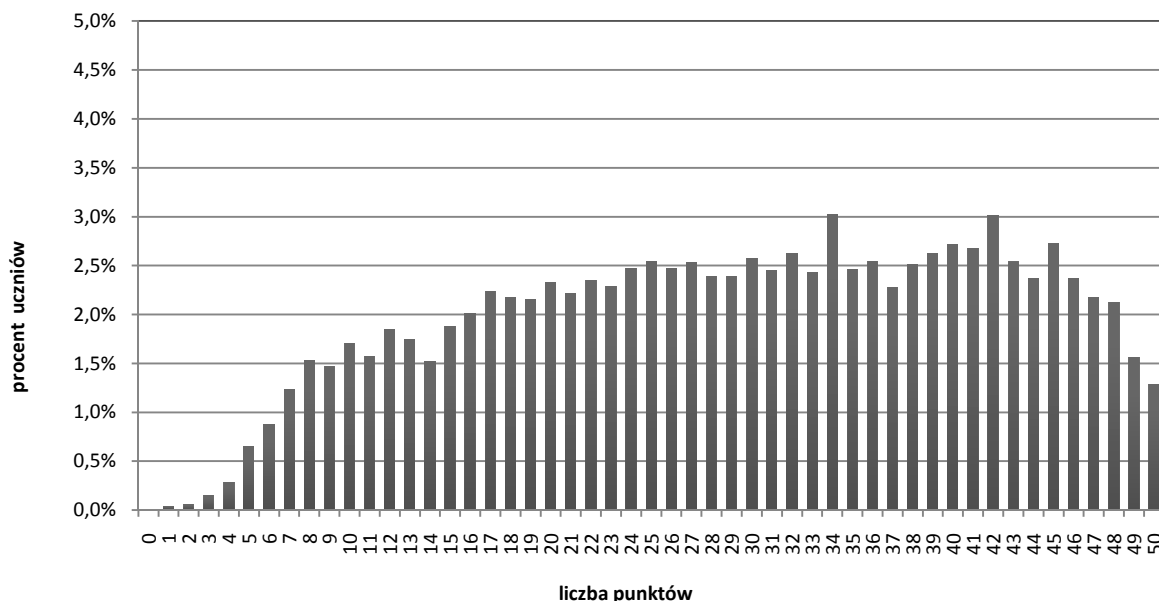
Tabela 2.1. Podstawowe wskaźniki statystyczne – województwo podlaskie

Rodzaj wskaźnika	Wartość wskaźnika
Liczebność	12 941
Wynik średni	29,2
% uzyskanych punktów	58
Wynik najniższy	0
Wynik najwyższy	50
Mediana	30
Modalna	34
Odchylenie standardowe	12,21

Tabela 2.2. Podstawowe wskaźniki statystyczne – województwo warmińsko-mazurskie

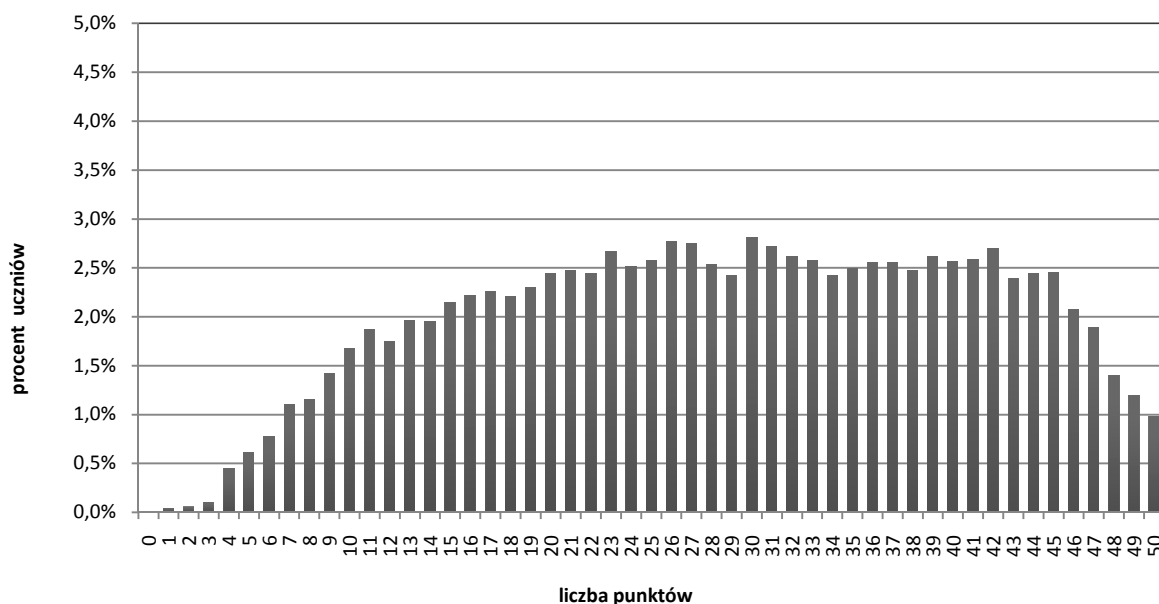
Rodzaj wskaźnika	Wartość wskaźnika
Liczebność	13 379
Wynik średni	28,6
% uzyskanych punktów	57
Wynik najniższy	0
Wynik najwyższy	50
Mediana	29
Modalna	30
Odchylenie standardowe	11,88

Wykres 2.1. Rozkład wyników – województwo podlaskie



Rozkład wyników w województwie podlaskim jest przesunięty w kierunku wyników wysokich i jest w miarę równomierny. Najczęstszy wynik to 34 pkt, czyli 68% pkt możliwych do zdobycia za cały test. Taki wynik uzyskało około 3% zdających. Maksymalny wynik (50 punktów) osiągnęło około 1,3% zdających. Wynik zerowy pojawił się w śladowych ilościach.

Wykres 2.1. Rozkład wyników – województwo warmińsko-mazurskie



Rozkład wyników w województwie warmińsko-mazurskim jest przesunięty w kierunku wyników wysokich i jest w miarę równomierny. Najczęstszy wynik to 30 pkt, czyli 60% pkt możliwych do zdobycia za cały test. Taki wynik uzyskało około 2,8% zdających. Maksymalny wynik (50 punktów) osiągnęło prawie 1% zdających. Wynik zerowy pojawił się w śladowych ilościach.

Tabela 2.3. Poziom opanowania umiejętności z uwzględnieniem typów zadań

Standard wymagań egzaminacyjnych	Typ zadania	Nr zadania	Procent uzyskanych punktów	
			województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
Wykorzystanie i tworzenie informacji	zadania zamknięte	3,5,6,11,12,15,16,17,18,23,24,25	80,8	79,6
	zadania otwarte	27, 31	52,5	51,4
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	zadania zamknięte	1,7,8,9,10,13,14,19,20,21,22	70,1	68,4
	zadania otwarte	26	57,7	57,9
Modelowanie matematyczne	zadania zamknięte	2	71,9	72,6
	zadania otwarte	33, 34	39,9	38,3
Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów	zadania zamknięte	4	69,8	67,2
	zadania otwarte	29, 32	50,7	49,9
Stosowanie prostego rozumowania do rozwiązywania problemów	zadania zamknięte	-	-	-
	zadania otwarte	28, 30	12,7	10,6

Rozwiązywalność zadań zamkniętych jest znacznie wyższa niż zadań otwartych. Najlepiej zostały rozwiązane zadania zamknięte badające umiejętność wykorzystania i tworzenia informacji (w granicach 80%). Spośród zadań otwartych najwyższą rozwiązywalność (około 60%) mają zadania badające umiejętności z drugiego standardu – wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji, a najniższą – zadania badające stosowanie prostego rozumowania do rozwiązywania problemów (standard 5.).

Tabela 2.4. Poziom opanowania umiejętności w obszarach

Obszar umiejętności	Procent uzyskanych punktów	
	województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
Wykorzystanie i tworzenie informacji	72,4	71,2
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	70,0	68,7
Modelowanie matematyczne	43,1	41,8
Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów	53,5	52,4
Stosowanie prostego rozumowania do rozwiązywania problemów	12,7	10,6

Spojrzenie całościowe na zadania (bez podziału na zadania zamknięte i otwarte) prowadzi do podobnych wniosków. Procenty uzyskanych punktów za poszczególne obszary umiejętności maleją wraz z numerem standardu. Nie dotyczy to standardu trzeciego – modelowanie matematyczne okazało się trudniejsze niż użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów.

W porównaniu do wyników próbnej matury z matematyki, przeprowadzonej 3 listopada 2009 roku, w sesji egzaminacyjnej w maju 2010 r. prawie wszystkie umiejętności uzyskały wyższy wskaźnik procentowy. Największa różnica 36% przypada na standard 4. (użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów). Procent uzyskanych punktów za standard 1. jest wyższy o około 11%, za standard 2. w granicach 2-3%. Standard 5. (stosowanie prostego

rozumowania do rozwiązywania problemów) wypada nieco słabiej (różnica w granicach 0,3-1,4%).

Tabela 2.5. Poziom opanowania treści w uwzględnieniu typów zadań

Dział podstawy programowej	Typ zadania	Nr zadania	Procent uzyskanych punktów	
			województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
Liczby, zbiory, równania	zadania zamknięte	1,2,3,4,5,6,7	79,8	79,5
	zadania otwarte krótkiej odpowiedzi	26,27,30	44,4	43,7
	zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi	34	44,9	42,9
Funkcje i ciągi liczbowe	zadania zamknięte	8,9,10,11,12	74,9	73,4
	zadania otwarte krótkiej odpowiedzi	-	-	-
	zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi	-	-	-
Geometria z elementami trygonometrii	zadania zamknięte	13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24	71,3	69,3
	zadania otwarte krótkiej odpowiedzi	28,29,31	37,3	36,3
	zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi	32	47,7	45,8
Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki	zadania zamknięte	25	92,6	92,4
	zadania otwarte krótkiej odpowiedzi	-	-	-
	zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi	33	33,7	32,6

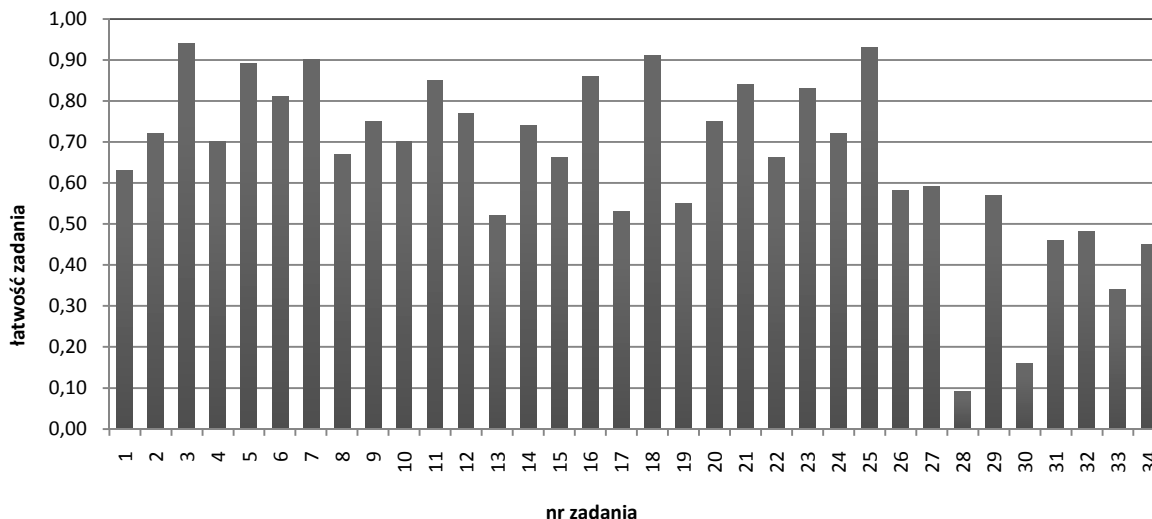
Uwzględniając strukturę treści w arkuszu, można zauważyć, że zadania zamknięte z każdego działu mają rozwiązywalność powyżej 70%; zadania krótkiej odpowiedzi w przedziale 37%-44%, a rozszerzonej odpowiedzi od 32,6% do 47,7%.

Tabela 2.6. Poziom opanowania treści wg podstawy programowej

Nr zadania	Zakres treści podstawy programowej	Liczba punktów	Procent uzyskanych punktów	
			województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
1,2,3,4	Liczby rzeczywiste	4	74,7	74,3
5, 30	Wyrażenia algebraiczne	3	40,8	39,3
6,7,26,27,34	Równania i nierówności	11	57,1	56,2
8,9,10	Funkcje	3	70,8	68,6
11, 12	Ciągi liczbowe	2	81,1	80,6
14, 29	Trygonometria	3	62,5	62,7
13,15,16,17,18,19,28,31	Planimetria	10	51,3	49,4
20,21,22	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	3	74,6	73,1
23,24,32	Stereometria	6	57,7	55,4
25, 33	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	5	45,4	44,6

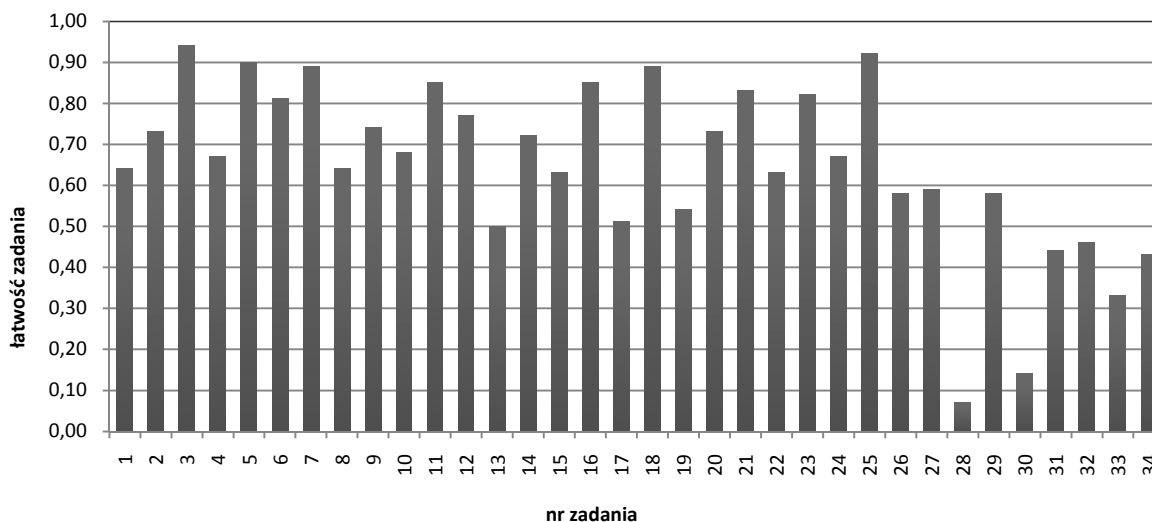
Najlepiej zostały rozwiązane zadania dotyczące: ciągów (ponad 80%), liczb rzeczywistych (ponad 74%), geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej (około 73-74%) i funkcji (około 70%). Najniższą rozwiązywalność uzyskały zadania dotyczące wyrażeń algebraicznych (około 40%) i rachunku prawdopodobieństwa (około 45%).

Wykres 2.3. Łatwość zadań – województwo podlaskie



Bardzo łatwe dla zdających w województwie podlaskim były zadania nr 3, 18, 7, 25, zaś bardzo trudne – zadania 28 i 30 (na dowodzenie).

Wykres 2.3. Łatwość zadań – województwo podlaskie



Bardzo łatwe dla zdających w województwie warmińsko-mazurskim były zadania nr 3, 5, 25; zaś bardzo trudne – zadania 28 i 30 (na dowodzenie).

Tabela 2.7. Stopień opanowania umiejętności sprawdzanych na poziomie podstawowym

Numer zadania	Sprawdzana umiejętność	Liczba punktów	Procent uzyskanych punktów	
			województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji				
3	Wykorzystanie definicji potęgi o wykładniku zero	1	94	94
5	Wykonanie dodawania wielomianów	1	89	90
6	Rozwiązanie prostego równania wymiernego, prowadzącego do równania liniowego	1	81	81
11	Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	1	85	85
12	Wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	1	77	77
15	Obliczenie długości boku kwadratu opisanego na okręgu	1	66	85
16	Wykorzystanie związków w trójkącie równoramiennym do wyznaczenia wysokości tego trójkąta	1	86	85
17	Wykorzystanie własności figur podobnych do obliczania długości odcinków	1	53	51
18	Korzystanie ze związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta środkowego	1	91	89
23	Obliczanie pola powierzchni wielościanu	1	83	82
24	Wykorzystanie własności wielościanów	1	72	67
25	Obliczanie średniej arytmetycznej	1	93	92
27	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki	2	59	59
31	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich	2	46	44
Procent uzyskanych punktów za 1. standard			72,4	71,2
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji				
1	Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $ x - a \geq b$	1	63	64
7	Sprawdzenie, czy dana liczba spełnia nierówność kwadratową	1	90	89
8	Odczytanie z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli	1	67	64
9	Interpretowanie współczynników we wzorze funkcji liniowej	1	75	74
10	Odczytywanie wartości funkcji z jej wykresu	1	70	68
13	Wykorzystanie własności wielokątów do wyznaczenia liczby przekątnych	1	52	50
14	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	1	74	72
19	Obliczanie pola figury płaskiej z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	1	55	54

Osiągnięcia maturzystów z województwa podlaskiego i warmińsko-mazurskiego w 2010 roku
- na podstawie wyników z egzaminu maturalnego z matematyki

20	Badanie równoległości prostych na podstawie ich współczynników kierunkowych	1	75	73
21	Korzystanie z równania okręgu o podanym promieniu	1	84	83
22	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie	1	66	63
26	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej	2	58	58
Procent uzyskanych punktów za 2. standard			70	68,7
3. Modelowanie matematyczne				
2	Stosowanie w obliczeniach pojęcia procentu	1	72	73
33	Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	4	34	33
34	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego	5	45	43
Procent uzyskanych punktów za 3. standard			43,1	41,8
4. Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów				
4	Stosowanie w obliczeniach wzoru na sumę logarytmów	1	70	67
29	Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego znając wartość innej funkcji trygonometrycznej	2	57	58
32	Obliczanie objętości wielościanu	4	48	46
Procent uzyskanych punktów za 4. standard			53,5	52,4
5. Stosowanie prostego rozumowania do rozwiązywania problemów				
28	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego	2	9	7
30	Przeprowadzenie dowodu nierówności algebraicznej	2	16	14
Procent uzyskanych punktów za 5. standard			12,7	10,6

Tabela 2.8. Zróżnicowanie wskaźnika łatwości zadań rozwiązywanych przez zdających w województwie podlaskim

zadanie	<i>bardzo łatwe</i> 0,90 – 1,00	<i>łatwe</i> 0,70 – 0,89	umiarkowanie trudne 0,50 – 0,69	<i>trudne</i> 0,20 – 0,49	<i>bardzo trudne</i> 0,00 – 0,19
numer zadania	3, 7, 18, 25	2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23, 24	1, 8, 13, 15, 17, 19, 22, 26, 27, 29	31, 32, 33, 34	28, 30

Tabela 2.9. Zróżnicowanie wskaźnika łatwości zadań rozwiązywanych przez zdających w województwie warmińsko-mazurskim

zadanie	<i>bardzo łatwe</i> 0,90 – 1,00	<i>łatwe</i> 0,70 – 0,89	umiarkowanie trudne 0,50 – 0,69	<i>trudne</i> 0,20 – 0,49	<i>bardzo trudne</i> 0,00 – 0,19
numer zadania	3, 5, 25	2, 6, 7, 11, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 23,	1, 4, 8, 9, 10, 13, 14, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 29	31, 32, 33, 34	28, 30

Bardzo trudne dla zdających, analogicznie jak na maturze próbnej, jest przeprowadzanie dowodów. Zadania rozszerzonej odpowiedzi badające modelowanie matematyczne oraz stosowanie strategii do rozwiązywania problemów okazały się trudne. Bardzo łatwe i łatwe były jedynie zadania zamknięte.

3. Opis standardowego arkusza egzaminacyjnego dla poziomu rozszerzonego

Zestaw składał się z 11 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich było sześć zadań czteropunktowych, cztery zadania pięciopunktowe i jedno zadanie sześciopunktowe. Zadania sprawdzały umiejętności opisane w trzech obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych.

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia tabela 1.1.

Tabela 3.1. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych.

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu	Liczba punktów	Waga
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji	-	-	-
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	-	-	-
3. Modelowanie matematyczne	5, 10	9	18%
4. Użycie i tworzenie strategii	1, 2, 3, 4, 6, 7, 11	32	64%
5. Rozumowanie i argumentacja	8, 9	9	18%

4. Wyniki zdających

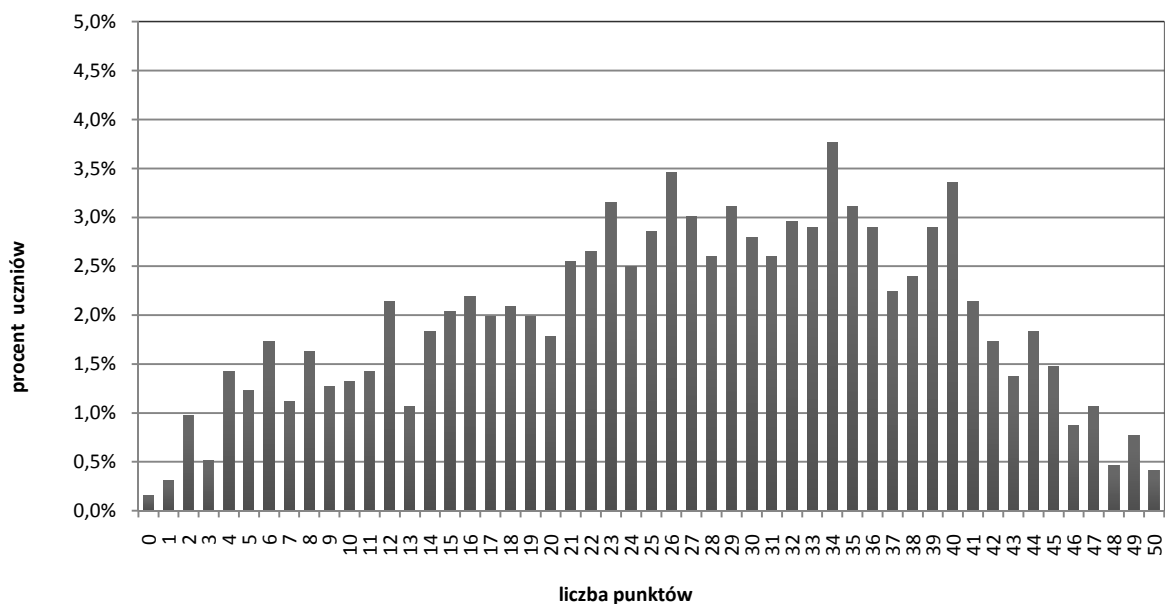
Tabela 4.1. Podstawowe wskaźniki statystyczne – województwo podlaskie

Rodzaj wskaźnika	Wartość wskaźnika
Liczebność	1 966
Wynik średni	26,6
% uzyskanych punktów	53
Wynik najniższy	0
Wynik najwyższy	50
Mediana	27
Modalna	34
Odchylenie standardowe	11,82

Tabela 4.2. Podstawowe wskaźniki statystyczne – województwo warmińsko-mazurskie

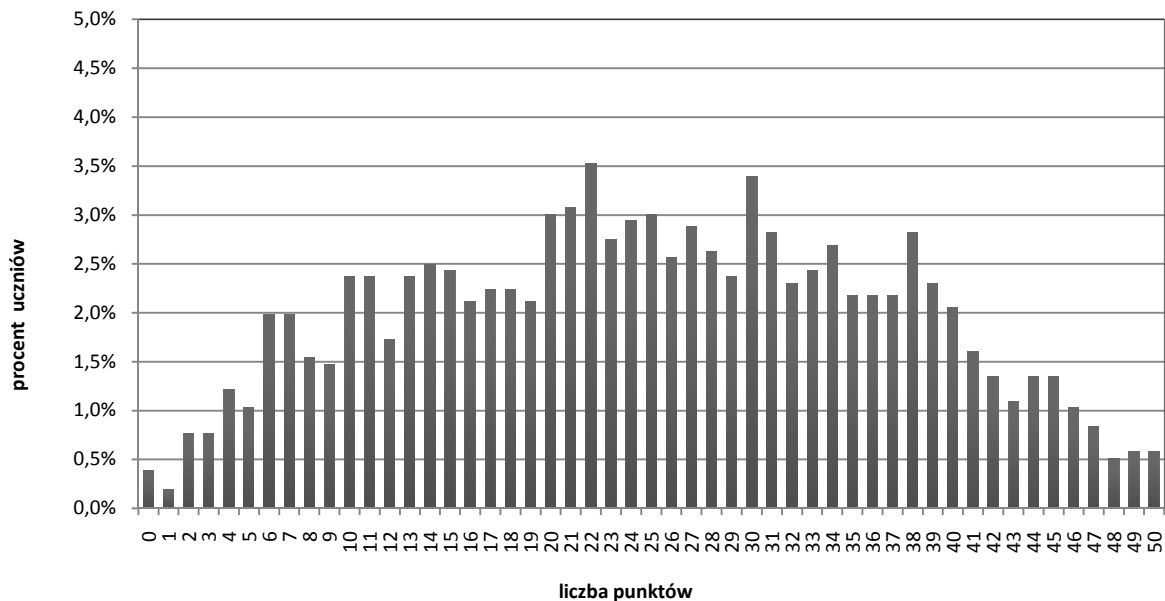
Rodzaj wskaźnika	Wartość wskaźnika
Liczebność	1 564
Wynik średni	24,9
% uzyskanych punktów	50
Wynik najniższy	0
Wynik najwyższy	50
Mediana	25
Modalna	22
Odchylenie standardowe	11,84

Wykres 4.1. Rozkład wyników – województwo podlaskie



Rozkład wyników w województwie podlaskim jest przesunięty w kierunku wyników wysokich. Najczęstszy wynik to 34 pkt, czyli 68% pkt możliwych do zdobycia za cały test. Taki wynik uzyskało około 3,8% zdających. Maksymalny wynik (50 punktów) osiągnęło około 0,4% zdających. Wynik zerowy uzyskało około 0,2% zdających.

Wykres 4.2. Rozkład wyników – województwo warmińsko-mazurskie



Rozkład wyników w województwie warmińsko-mazurskim jest zbliżony do rozkładu normalnego. Najczęstszy wynik to 22 pkt, (44% pkt możliwych do zdobycia za cały test). Taki wynik uzyskało około 3,5% zdających. Maksymalny wynik (50 punktów) osiągnęło około 0,6% zdających, a wynik zerowy – około 0,4% zdających.

Tabela 4.3. Poziom opanowania umiejętności w obszarach

Obszar umiejętności	Procent uzyskanych punktów	
	województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
Wykorzystanie i tworzenie informacji	-	-
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	-	-
Modelowanie matematyczne	59,9	58,6
Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów	54	50,2
Stosowanie rozumowania do rozwiązywania problemów	44	39,6

Arkusz na poziomie rozszerzonym badał umiejętności z wyższych obszarów standardów (3.,4.,5.). Najprostsze z badanych umiejętności okazało się modelowanie matematyczne (rozwiązywalność prawie 60%), a najtrudniejsze stosowanie rozumowania do rozwiązywania problemów (rozwiązywalność około 40%).

Tabela 4.4. Poziom opanowania treści wg podstawy programowej

Dział podstawy programowej	Nr zadania	Procent uzyskanych punktów	
		województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
Liczby, zbiory, równania	1, 4, 6	67,4	64,1
Funkcje i ciągi liczbowe	3, 5, 8	50,4	46,5
Geometria z elementami trygonometrii	2, 7, 9, 11	50,5	46,8
Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki	10	29,4	29,4

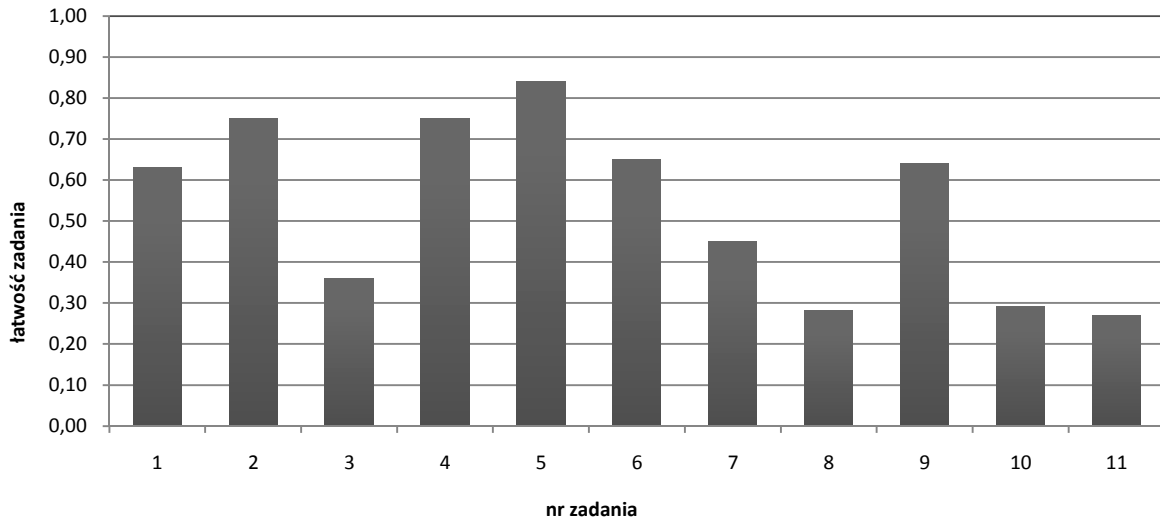
W arkuszu na poziomie rozszerzonym wszystkie umiejętności są sprawdzane jedynie zadaniami rozszerzonej odpowiedzi. Najtrudniejsze okazało się zadanie z rachunku prawdopodobieństwa.

Tabela 4.5. Poziom opanowania treści wg działów z informatora maturalnego

Nr zadania	Zakres treści podstawy programowej	Liczba punktów	Procent uzyskanych punktów	
			województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
-	Liczby rzeczywiste	-	-	-
4	Wyrażenia algebraiczne	4	75,1	72,6
1,6	Równania i nierówności	9	64,3	60,3
3, 8	Funkcje	9	31,6	26,8
5	Ciągi liczbowe	5	84,4	81,9
2	Trygonometria	4	75,3	73
9	Planimetria	4	63,9	59,4
7	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	6	44,9	40,8
11	Stereometria	5	26,8	22,9
10	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	4	29,4	29,4

Przy dokładniejszym rozbiciu treści na działy programowe można zauważyć, że w stopniu niezadawalającym zostały opanowane umiejętności z działów: stereometria, rachunek prawdopodobieństwa i funkcje. Najlepiej zostały rozwiązane zadania dotyczące ciągów liczbowych, trygonometrii i wyrażeń algebraicznych.

Wykres 4.3. Łatwość zadań – województwo podlaskie



Wykres 4.4. Łatwość zadań – województwo warmińsko-mazurskie

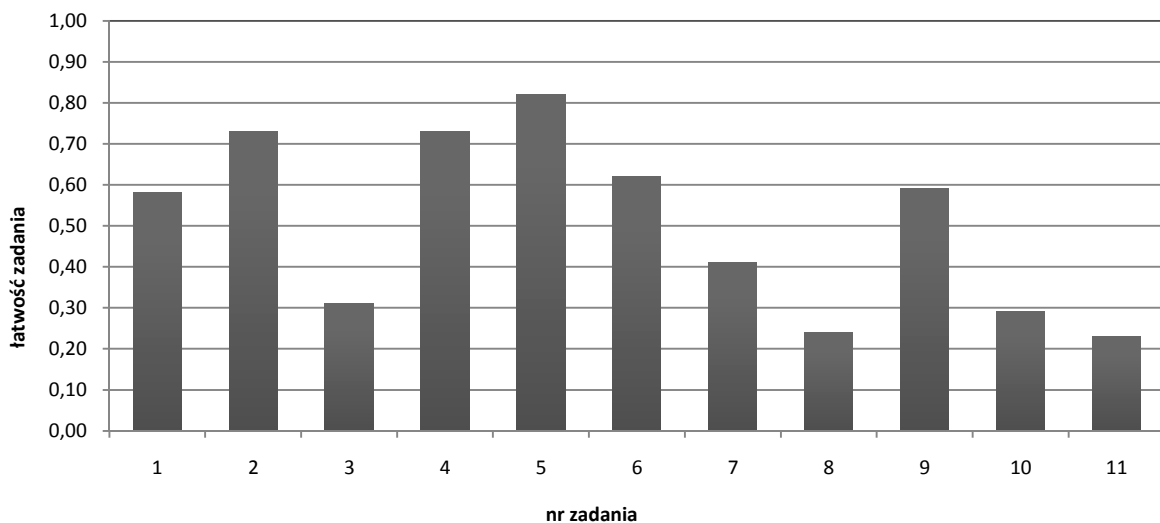


Tabela 4.6. Zróżnicowanie wskaźnika łatwości zadań w obu województwach

zadanie	<i>bardzo łatwe</i> 0,90 – 1,00	<i>łatwe</i> 0,70 – 0,89	<i>umiarkowanie trudne</i> 0,50 – 0,69	<i>trudne</i> 0,20 – 0,49	<i>bardzo trudne</i> 0,00 – 0,19
numer zadania	-	2, 4, 5,	1, 6, 9	3, 7, 8, 10,11	-

Okazuje się, że nie było dla zdających zadań bardzo trudnych ani bardzo łatwych.

Tabela 4.7 Stopień opanowania umiejętności sprawdzanych na poziomie rozszerzonym

Numer zadania	Sprawdzana umiejętność	Liczba punktów	Procent uzyskanych punktów	
			województwo podlaskie	województwo warmińsko-mazurskie
3. Modelowanie matematyczne				
5	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego	5	84	82
10	Obliczanie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	4	29	29
Procent uzyskanych punktów za 3. standard			59,9	58,6
4. Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów				
1	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną	4	63	58
2	Rozwiązanie równania trygonometrycznego	4	75	73
3	Rozwiązanie zadania w kontekście praktycznym, prowadzącego do badania funkcji kwadratowej	4	36	31
4	Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianów	4	75	73
6	Przeprowadzanie dyskusji trójmianu kwadratowego z parametrem	5	65	62
7	Rozwiązanie zadania z geometrii analitycznej	6	45	41
11	Obliczanie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii	5	27	23
Procent uzyskanych punktów za 4. standard			54	50,2
5. Stosowanie rozumowania i argumentacji				
8	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego	5	28	24
9	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego	4	64	59
Procent uzyskanych punktów za 5. standard			44	39,6

Najłatwiejsze dla zdających okazało się modelowanie matematyczne w zakresie wykorzystania własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego (zadanie 5). Zadanie 10 przyporządkowane również do standardu 3., a sprawdzające obliczanie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem definicji klasycznej, było dla maturzystów trudne. Najtrudniejsze było przeprowadzenie dowodu algebraicznego (zadanie 8).

5. Mocne i słabe strony wykształcenia matematycznego maturzystów

Matematyka jest ważna i piękna, ale jeżeli nie ma na to świadectwa w szkole, to niewielu w to uwierzy.
(prof. Wacław Zawadowski)

Egzamin maturalny z matematyki stał się ponownie po 25 latach egzaminem obowiązkowym dla polskich maturzystów. Zgodnie z zaleceniami Parlamentu Europejskiego: *Absolwent szkoły powinien posiadać umiejętności stosowania głównych zasad i procesów matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i zawodowych, a także śledzenia i oceny ciągów argumentów. Powinien być w stanie rozumować w matematyczny sposób, rozumieć dowód matematyczny i komunikować się językiem matematycznym oraz korzystać z odpowiednich pomocy.* (10.11.2005).

Rok 2010 był rokiem zmian w egzaminie maturalnym z matematyki, bo oprócz obowiązkowości tego przedmiotu arkusze po raz pierwszy sprawdzały nowe wymagania egzaminacyjne według nowych zasad oceniania.

Tegoroczne zadania egzaminacyjne badały umiejętności maturzystów w zakresie wykorzystania i tworzenia informacji, wykorzystania i interpretowania reprezentacji, modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii, rozumowania i argumentacji.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego badały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych, a w arkuszu z poziomu rozszerzonego tylko w trzech wyższych, t.j. modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii, rozumowania i argumentacji.

Rozwiązania zadań przez zdających pokazują ogromne zróżnicowanie stopnia opanowania wiadomości i umiejętności matematycznych, które powinien posiadać absolwent szkoły ponadgimnazjalnej. Poziom opanowania umiejętności jest uzależniony od numeru standardu – im wyższy standard, tym mniejszy procent uzyskanych punktów. Zależność ta jest wyraźnie widoczna na poziomie rozszerzonym. Na poziomie podstawowym do zachwiania dochodzi pomiędzy trzecim i czwartym standardem. Za zadania zmodelowania matematycznego zdający uzyskali około 43% punktów, a za zadania z obszaru użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów o 10% więcej. Zadawalający jest stopień opanowania I standardu – wykorzystywania i tworzenia informacji (ponad 70%). Rozwiązywalność zadań badających wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji to także około 70%.

Tegoroczni maturzyści osiągnęli wysokie wyniki za zadania sprawdzające podstawowe wiadomości i typowe umiejętności, kształcone już w gimnazjum. Należą do nich: wykorzystanie w obliczeniach praw działań na potęgach (zadanie 3 PP), korzystanie ze związków między kątem środkowym i wpisanym (zadanie 18 PP), obliczanie średniej arytmetycznej (zadanie 25 PP). Zdający dobrze poradzili sobie także z typowymi umiejętnościami kształconymi dopiero w szkole ponadgimnazjalnej takimi jak: dodawanie wielomianów (zadanie 5 PP), sprawdzenie, czy dana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej (zadanie 7 PP), wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego (zadanie 11 PP), rozwiązanie prostego równania wymiernego prowadzącego do równania liniowego (zadanie 6 PP). Zadania otwarte badające te umiejętności okazały się natomiast umiarkowanie łatwe. W rozwiązywaniu równania wielomianowego trzeciego stopnia (zadanie 27 PP) często pojawiały się następujące błędy:

- gubienie jednego (ujemnego) rozwiązania równania $x^2=4$,
- błędne rozkładanie i wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
- brak zmiany znaków przy składnikach podczas wyłączania ujemnego czynnika przy stosowaniu metody grupowania wyrazów,
- podawanie rozwiązania równania w postaci przedziału liczbowego,
- podanie czterech pierwiastków równania trzeciego stopnia.

Podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej (zadanie 26 PP), podobnie jak podczas matury próbnej, zdający popełniali błędy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego (nawet na etapie obliczania wyróżnika trójmianu kwadratowego) i na tym poprzestawali, poprawnie obliczali pierwiastki i błędnie zapisywali zbiór rozwiązań nierówności jako tylko dwie liczby – 1 i 2.

Umiarkowanie łatwe (rozwiązywalność 57%-58%) okazało się wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, znając wartość innej funkcji trygonometrycznej (zadanie 29. PP). Maturzyści rozwiązywali to zadanie, korzystając z jedynej trygonometrycznej albo w oparciu o definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Stosując jedynekę trygonometryczną, zdający często nie doprowadzali rozwiązania do końca. Pojawiały się błędy w przekształcaniu wyrażeń, np. $\sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x$ a także pomyłki rachunkowe.

Często zdający nie dokonywali wyboru odpowiedzi, gdy pojawiały się dwie: dodatnia i ujemna. Zdarzały się rozwiązania doprowadzone do końca z pomyłką rachunkową, w których $\cos \alpha$ przyjmował wartość większą od 1 – zdający bezkrytycznie przyjmowali otrzymaną odpowiedź.

Rozwiązania zadania w oparciu o definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym częściej kończyły się sukcesem, o ile zdający wykonał właściwy rysunek i poprawnie wyznaczył długość przeciwprostokątnej. Zdarzały się błędy w udzieleniu odpowiedzi: zamiast $\cos \alpha$ podawano wartość $\sin \alpha$

Często zdający nie zaznaczał kąta α w trójkącie, ale właściwie udzielał odpowiedzi w oparciu o narysowany trójkąt. Zdarzały się rozwiązania, w których błędnie zaznaczano kąt i konsekwentnie prowadzono rozwiązanie do końca .

Analogicznie jak w poprzednich latach i w tym roku maturzyści poprawnie rozwiązywali typowe zadania geometryczne o małym stopniu złożoności. Zdający wykazali się umiejętnością wykorzystania związków w trójkącie równoramiennym do wyznaczenia wysokości trójkąta (zadanie 17 PP), obliczania pól powierzchni wielościanów (zadanie 23 PP), korzystania z równania okręgu o danym promieniu (zadanie 21 PP), rozwiązania równania trygonometrycznego (zadanie 2 PR). Znacznie więcej kłopotów sprawiło zdającym rozwiązanie zadania wymagającego wykorzystania związków miarowych w figurach płaskich (zadanie 31 PP), a także obliczenie objętości z wykorzystaniem trygonometrii (zadanie 11. PR). Rozwiązując zadanie 31 PP (rozwiązywalność 45%), zdający mieli problem z prawidłowym podziałem trapezu – dzielili na trójkąt równoboczny i trójkąt równoramienny lub na dwa trójkąty równoramienne, błędnie interpretowali trójkąt (wysokość trapezu zamieniona z krótszą podstawą trapezu). Zdarzały się też takie rozwiązania, w których miary kątów trójkąta równobocznego to 45° ; 45° ; 45° . Pojawiały się też błędy rachunkowe, np.

$$h^2 = 36 - 9 = 25 \quad \text{lub} \quad 6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

Zadanie 11 okazało się najtrudniejsze w tegorocznym arkuszu na poziomie rozszerzonym. Za zadanie można było otrzymać 5 punktów. Zdający pokonał zasadnicze trudności zadania, jeżeli poprawnie zaznaczył kąt dwuścienny oraz wyznaczył wysokość ściany bocznej i długość krawędzi bocznej lub wysokość trójkąta ABE i długość odcinka EC. Najczęściej występujące problemy z rozwiązaniem tego zadania:

- błędnie zaznaczony kąt dwuścienny;
- interpretowanie ostrosłupa jako czworościanu foremego, w którym wierzchołek kąta dwuściennego znajduje się w połowie krawędzi bocznej;
- błędy w przekształceniach algebraicznych, np. brak podniesienia do kwadratu $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ lub w wyznaczaniu niewiadomej z otrzymanego wzoru;
- niepoprawne stosowanie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, twierdzenia Pitagorasa, podobieństwa (np. zdający zauważa, że trójkąty są podobne i zapisuje niewłaściwą proporcję).

Tak więc kolejny raz okazało się, że rozwiązywanie złożonych zadań z geometrii jest dla maturzystów trudne.

Słabą stroną zdających okazało się obliczanie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem definicji klasycznej. Zadanie 33 na poziomie podstawowym badające tę umiejętność uzyskało rozwiązywalność 33%-34%. Najczęstsze błędy popełniane w tym zadaniu to:

- dodawanie do zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A pary (3,4) (szczególnie przy wykorzystaniu metody tabelki – brak rozróżnienia kostki I i kostki II);
- dodawanie oczek parzystych z I i II kostki i traktowanie otrzymanej liczby jako mocy A;
- powtarzanie w zdarzeniach sprzyjających pary (6,6) i gubienie innej pary (wtedy prawdopodobieństwo również jest równe $1/6$);
- błędy nieuwagi w liczeniu liczby zdarzeń sprzyjających (5 lub 7).

Zadanie 10 na poziomie rozszerzonym badające tę umiejętność z rachunku prawdopodobieństwa uzyskało rozwiązywalność 29%. Problemem dla zdających w tym zadaniu było określenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu, co wiązało się z podzielnością liczb. Najczęściej występujące problemy z rozwiązaniem tego zadania:

- rzadko zdający zauważali, że suma kwadratów jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3. Zazwyczaj wypisywali zdarzenia elementarne, wśród których były również inne zdarzenia elementarne niż sprzyjające zajściu zdarzenia określonego w zadaniu;
- zdający wypisywali i zliczali zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, pomijając wiele z nich;
- często rozwiązanie kończyło się na podaniu mocy Ω i próbie zliczenia zdarzeń sprzyjających;
- zdarzały się błędy rachunkowe w obliczeniu Ω , np. $|\Omega| = 6^3 = 1296$.

Bardzo trudne na poziomie podstawowym okazało się stosowanie prostego rozumowania do rozwiązywania problemów (standard 5.). Za przeprowadzenie dowodu geometrycznego (zadanie 28 PP) zdający uzyskali jedynie 8% możliwych punktów. Najczęstsze błędy w tym zadaniu to:

- brak uzasadniania równości kątów przy powoływaniu się na cechę bkb, powoływanie się na współliniowość punktów A, D, E,
- uzasadnianie podobieństwa trójkątów danych ABC i CDE, a nie tych prowadzących do przeprowadzenia dowodu,
- uzasadnianie przystawania trójkątów z wykorzystaniem tezy i cechy bbb,
- notoryczne mylenie podobieństwa z przystawaniem.

Przeprowadzenie dowodu nierówności algebraicznej (zadanie 30 PP) okazało się również trudne. W większości rozwiązań nie widać koncepcji w uzasadnianiu nierówności, zdający wykonywali szereg przekształceń, niekoniecznie poprawnych i niczego nieuzasadniających. Do najczęstszych błędów należy zaliczyć sprawdzenie nierówności dla kolejnych kilku liczb naturalnych ($a=1$, $a=2$) i na tym zakończenie „dowodu”. Dużym mankamentem okazała się mała sprawność w przekształcaniu wyrażeń, np. $a^2+1=(a+1)^2$, a także utożsamianie nierówności z równaniem.

W arkuszu na poziomie rozszerzonym przeprowadzenie dowodu geometrycznego (zadanie 9 PR) okazało się umiarkowanie trudne, a dowodu algebraicznego – trudne (zadanie 8 PR). Najczęściej występujące problemy z rozwiązaniem zadania 8:

- obliczenie pola trójkąta dla konkretnie wybranych punktów A oraz B,
- błędne oznaczenia punktów $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$ $B = \left(-x, -\frac{1}{x^2}\right)$,
- brak odpowiednich założeń w przypadku opuszczania modułu, przy wyznaczonym polu trójkąta,
- brak odpowiednich założeń w przypadku mnożenia nierówności przez x (przeważnie zdający zapisywali $x \neq 0$).

Po uzyskaniu wzoru na pole zdający rzadko potrafili uzasadnić prawdziwość otrzymanej nierówności.

Zadanie (34 PP) umieszczone w kontekście praktycznym prowadzące do równania kwadratowego badające umiejętność modelowania matematycznego sprawiło zdającym również wiele trudności. Część zdających miała problem z poprawną interpretacją treści zadania, np. zdający liczyli pole powierzchni prostopadłościanu lub objętość prostopadłościanu. Najczęstszą jednak przeszkodą w prawidłowym rozwiązaniu tego zadania było rozwiązanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Zdający po zapisaniu dwóch równań poszukiwali metodą prób i błędów wymiarów basenów wśród dzielników liczb 240 i 350. Często też zdający rozwiązywali równanie kwadratowe z niewiadomą x lub y , a potem źle interpretowali wymiary basenów.

Jak co roku, wiele rozwiązań tegorocznych arkuszy pokazuje całkowite zrozumienie problemów matematycznych w nich zawartych. Prawie wszystkie rozwiązania były przewidziane w przygotowanych przez CKE rozbudowanych schematach oceniania. Nieliczne rozwiązania odbiegające od schematów najczęściej były dłuższe i bardziej pracochłonne, a więc nie będą przytaczane.

W wielu pracach przedstawiano jednak rozwiązania z lukami lub niedokończone, nie udzielano odpowiedzi zgodnej z poleceniem lub nie sprawdzano jej poprawności z treścią zadania, np. w zadaniu 34 PP. Wiele zadań z arkuszy maturalnych było podobnych do zadań zamieszczonych w informatorze maturalnym. Każdy maturzysta podczas przygotowywania się do egzaminu maturalnego powinien je rozwiązać. Rolą nauczyciela jest zapoznanie ucznia z *Informatorem o egzaminie maturalnym z matematyki od 2010 roku* oraz zachęcenie do pracy z nim lub wręcz wyegzekwowanie rozwiązania zawartych w nim zadań. Wskazana jest praca ciągła z informatorem już od pierwszej klasy szkoły ponadgimnazjalnej, np. po zrealizowanym dziale właściwy jest wybór odpowiednich zadań do rozwiązania na lekcji powtórzeniowej.

Ze spostrzeżeń egzaminatorów, którzy sprawdzali arkusze egzaminacyjne, wynika, że zarówno poziom merytoryczny odpowiedzi maturzystów, jak i ich język matematyczny były bardzo zróżnicowane. Często, zwłaszcza na poziomie podstawowym, język matematyczny, jakim posługiwali się piszący, był niepoprawny, a także wskazywał na niezrozumienie rozwiązywanego problemu. Na to ma wpływ całokształt kształcenia matematycznego maturzysty – od nauczania wczesnoszkolnego do końca szkoły ponadgimnazjalnej i za efekt końcowy odpowiedzialni są nauczyciele matematyki na wszystkich etapach kształcenia. Od początku edukacji matematycznej trzeba uczyć rozumowania, poprawnego języka matematycznego, refleksyjnego spojrzenia na uzyskany wynik.

Maturzyści w wielu sytuacjach wykazali się umiejętnością budowania modelu matematycznego dla danego zagadnienia oraz umiejętnością poprawnego wyboru strategii rozwiązania. Dotyczyło to sytuacji, gdy zadania były algorytmiczne, nieskomplikowane. Rozwiązując zadania złożone i nietypowe, większość zdających miała problemy już na początkowym etapie analizy treści zadania.

Warto więc w pracy dydaktycznej z uczniami poświęcić sporo uwagi na kształcenie umiejętności analizy treści zadania, warunków danych w zadaniu i zależności między nimi, a także doboru właściwych metod jego rozwiązania i sprawdzenia uzyskanych wyników z warunkami zadania. Należy zadbać o dobre zrozumienie wprowadzanej teorii (definicji i twierdzeń). Uczeń, który rozumie np. czym jest prawdopodobieństwo, nie poda odpowiedzi $P(A)=2$ (dość często w rozwiązaniach zadania z rachunku prawdopodobieństwa na poziomie podstawowym prawdopodobieństwo było liczbą większą od 1). Właściwe rozumienie teorii umożliwi zbudowanie właściwego modelu matematycznego, a dobrze opanowane algorytmy matematyczne pozwolą na doprowadzenie rozwiązania do końca. Niestety w wielu pracach na poziomie podstawowym można zauważyć brak opanowania podstawowych algorytmów, np. prowadzących do rozwiązania równania wielomianowego czy rozwiązania nierówności kwadratowej. Zdarzały się także błędy w stosowanych wzorach matematycznych, pomimo moż-

liwości korzystania na egzaminie z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*. Uczeń powinien korzystać „na co dzień” z tych tablic, znać je i mieć nawyk sięgania do wzorów.

Zadania „na dowodzenie” zawsze były najtrudniejsze i są one elementem różnicującym zdających. Młodzież niechętnie podejmuje się rozwiązywania takich zadań. Frakcja opuszczonych zadań na dowodzenie zwykle jest najwyższa. W tegorocznym egzaminie maturalnym 26% zdających opuściło zadanie z dowodem geometrycznym, a 18% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania zadania z dowodem algebraicznym (na poziomie podstawowym). Zadania tego typu zamieszczane w arkuszach na poziomie podstawowym wymagają przeprowadzenia prostego rozumowania składającego się z niewielkiej liczby kroków. Warto więc podczas całego cyklu kształcenia rozwiązywać takie zadania, aby przynajmniej niektórym uczniom dać szansę na opanowanie umiejętności ich rozwiązywania.

Tak, jak już wcześniej, zauważono nienajlepiej wypadają zadania geometryczne. Czy w szkołach wystarczająco dużo czasu poświęca się na geometrię? Czy rozwiązuje się zadania, które wymagają od ucznia skojarzenia różnych faktów i wyboru strategii rozwiązania?

Analiza rozwiązań zadań z arkuszy maturalnych pokazuje, że w pracy dydaktycznej z uczniami należałoby zwrócić uwagę na kształcenie takich umiejętności, jak:

- rozumienie wprowadzanych pojęć,
- wnikliwa analiza warunków zadania,
- rozumowanie matematyczne w oparciu o poznaną teorię,
- precyzyjny zapis rozwiązania,
- używanie poprawnego języka matematycznego,
- refleksyjne spojrzenie na uzyskany wynik, tzw. „rzucenie okiem wstecz”,

Warto w przyszłości w pracy z uczniami zwrócić uwagę na:

- rozwiązywanie zadań wymagających argumentowania i przeprowadzania rozumowań typu matematycznego oraz uzasadniania,
- stosowanie metod matematycznych w sytuacjach problemowych, również praktycznych,
- analizowanie otrzymanych wyników,
- korzystanie z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych oraz Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki od 2010 roku*.

Systematyczna i spójna praca nauczycieli matematyki na wszystkich etapach kształcenia powinna przyczynić się do spełnienia przytoczonych na początku rozdziału zaleceń Parlamentu Europejskiego.