EGZAMIN EKSTERNISTYCZNY Z MATEMATYKI

Z ZAKRESU LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO DLA DOROSŁYCH

PRZYKŁADOWE ZADANIA EGZAMINACYJNE WRAZ Z ROZWIĄZANIAMI

Poniżej prezentujemy przykładowe zadania, które znalazły się na egzaminie eksternistycznym z matematyki z zakresu liceum ogólnokształcącego w latach 2008 i 2009, pogrupowane w zależności od sprawdzanych treści.

I Liczby, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Zaznacz na osi liczbowej liczby $a = \frac{\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5^{\frac{11}{3}}}{\left(\sqrt{5}\right)^4}$ i $b = \left(2+\sqrt{19}\right)\left(2-\sqrt{19}\right)$.

Rozwiązanie

Obliczamy liczbę a, korzystając z definicji potęgi o wykładniku wymiernym oraz twierdzeń o działaniach na potęgach:

- z definicji potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym:

$\frac{1}{a} = a^{-1}\ dla\ a \neq 0, stąd\ \frac{1}{5} = 5^{-1}$.

- z definicji potęgi o wykładniku wymiernym:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\ dla\ a \geq 0\ oraz\ n \in N, stąd\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

Z powyższych definicji oraz twierdzenia o mnożeniu potęg o tych samych podstawach obliczamy licznik:

$$\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5^{\frac{11}{3}} = 5^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{11}{3}} = 5^{-1+\frac{1}{3}+\frac{11}{3}} = 5^{-1+\frac{12}{3}} = 5^{-1+4} = 5^3$$

Z definicji potęgi o wykładniku wymiernym oraz twierdzenia o potędze potęgi obliczamy mianownik:

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}\ czyli\ \left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 5^2\ .$$

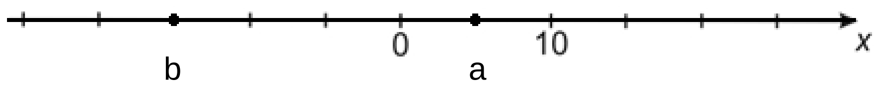
Obliczamy liczbę a, korzystając z twierdzenia o dzieleniu potęg o tych samych podstawach:

$$a = \frac{5^3}{5^2} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5.$$

Obliczamy liczbę b, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na sumę i iloczyn takich samych składników:

$$b = (2+\sqrt{19})(2-\sqrt{19}) = 2^2 - (\sqrt{19})^2 = 4 - 19 = -15$$

Liczby a i b zaznaczamy na osi liczbowej:



Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1.	1.1	II.4)a)	wykonuje działania na potęgach	Zastosowanie wzoru na iloczyn potęg o tych samych podstawach do zapisania licznika liczby *a* w postaci: 5^3 lub 125.	1
	1.2		wykonuje działania na potęgach	Obliczenie *a*: $a = 5$.	1
	1.3		wykonuje działania na liczbach niewymiernych	Obliczenie *b*: $b = -15$.	1
	1.4	I.1	zaznacza liczby na osi liczbowej	Zaznaczenie *a* i *b* na osi liczbowej.	1

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{8x^3+4x^2}{2x^2}\ dla\ x = -\frac{1}{2}$. to

A. 4

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. 0

Rozwiązanie

Przede wszystkim sprawdzamy, czy liczba $-\frac{1}{2}$ należy do dziedziny wyrażenia. W tym celu wstawiamy ją w miejsce x w mianowniku (mianownik powinien być różny od 0!).

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Liczba $-\frac{1}{2}$ należy do dziedziny wyrażenia.

I sposób

Przekształcamy wyrażenie $\frac{8x^3+4x^2}{2x^2}$ do prostszej postaci, wyłączając wspólny czynnik poza nawias w liczniku i skracając ułamek, czyli:

$$\frac{8x^3+4x^2}{2x^2}=\frac{4x^2(2x+1)}{2x^2}=2(2x+1)$$

Następnie w miejsce x wstawiamy $-\frac{1}{2}$ i obliczamy wartość liczbową wyrażenia:

$$2\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)=2\cdot(-1+1)=2\cdot 0=0$$

II sposób

Wystarczy, wykonując proste obliczenia w pamięci, zauważyć, że dla $x=-\frac{1}{2}$ zeruje się licznik. W takim razie ułamek przyjmuje wartość 0 dla $x=-\frac{1}{2}$, poprawną odpowiedzią jest odpowiedź wskazana w punkcie D.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
2.	1	I.2	wyłącza wspólny czynnik poza nawias w celu uproszczenia wyrażenia i oblicza wartość liczbową wyrażenia algebraicznego	przedstawione wyżej	1

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Agata wpłaciła do banku 5000 zł na lokatę roczną. Oprocentowanie tej lokaty w skali roku wynosi 4%. Jaką kwotą będzie dysponowała Agata po trzech latach? (Przyjmujemy, że w tym okresie Agata nie dokonuje żadnych operacji bankowych i bank nie pobiera podatku od lokaty).

A. $5000\left(1+\frac{4}{100}\cdot 5000\right)^3$

B. $5000\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$

C. $5000+\frac{4}{100}\cdot 5000\cdot 3$

D. $5000\left(1+\frac{3}{100}\right)^4$

Rozwiązanie

Zadanie sprawdza znajomość wzoru na procent składany i jego zastosowania w sytuacji praktycznej. Jeżeli kapitał początkowy *K* złożymy na *n* lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi *p%* w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź B.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
3.	1	I.1	stosuje wzór na procent składany w sytuacji praktycznej	przedstawione wyżej	1

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$

Rozwiązanie

I sposób

Rozkładamy wyrażenie $x^3 - 6x^2 - 4x + 24$ na czynniki, grupując wyrazy, wyłączając wspólny czynnik poza nawias i stosując wzory skróconego mnożenia:

$$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = (x^3 - 6x^2) - (4x - 24) = x^2(x - 6) - 4(x - 6)$$
$$= (x - 6)(x^2 - 4) = (x - 6)(x - 2)(x + 2)$$

Równanie przyjmuje postać:

$(x - 6)(x - 2)(x + 2) = 0$

Iloczyn jest równy 0, gdy przynajmniej jeden z czynników tego iloczynu jest równy 0. Stąd:

$x - 6 = 0$ lub $x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$ czyli

$x = 6$ lub $x = 2$ lub $x = -2$

II sposób

Wymiernych pierwiastków równania wielomianowego, o współczynniku przy x w najwyższej potędze równym 1, szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego, czyli dzielników 24.

Dzielniki 24:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24.$

Sprawdzamy, która z ww. liczb jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$:

$W(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 24 = 1 - 6 - 4 + 24 = 15 \neq 0,$ czyli 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu.

$W(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 24 = -1 - 6 + 4 + 24 = 21 \neq 0,$ czyli -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu.

$W(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 24 = 8 - 6 \cdot 4 - 8 + 24 = 0,$ czyli 2 jest pierwiastkiem wielomianu.

Znając rozwiązanie równania wiemy, że wszystkie pierwiastki tego wielomianu znajdziemy, podstawiając kolejne dzielniki 24. Wielomian może mieć jednak pierwiastki niewymierne, których w ten sposób nie znajdziemy. Dlatego też, gdy mamy jeden pierwiastek wielomianu, korzystamy z twierdzenia Bezouta i dzielimy wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - 2$. Najprościej wykonamy dzielenie, korzystając ze schematu Hornera:

$$(x^3 - 6x^2 - 4x + 24):(x - 2) = x^2 - 4x - 12$$

	1	-6	-4	24
2	1	-4	-12	0

Możemy także wykonać pisemne dzielenie wielomianów:

$(x^3 - 6x^2 - 4x + 24):(x - 2) = x^2 - 4x - 12$

$\underline{-x^3 + 2x^2}$

$-4x^2 - 4x + 24$

$\underline{+4x^2 - 8x}$

$-12x + 24$

$\underline{+12x - 24}$

$= \quad =$

Pozostałych pierwiastków równania szukamy wśród rozwiązań równania kwadratowego:

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64, \qquad \sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{4 - 8}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \qquad x_2 = \frac{4 + 8}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Odpowiedź możemy zapisać na różne sposoby, np. $x \in \{-2,2,6\}$ czy $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = 6$ czy też: równanie spełniają liczby -2, 2, 6.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
4.	4.1	II.4)d)	stosuje algorytm do rozwiązania równania wielomianowego	Zapisanie równania w postaci, np. $x^2(x-6)-4(x-6)=0$ (lewa strona równania musi mieć postać sumy iloczynów, w których występuje ten sam czynnik).	1
	4.2			Przekształcenie równania do postaci iloczynowej, np. $(x-6)(x^2-4)=0$	1
	4.3			Wyznaczenie zbioru rozwiązań równania: np. $x \in \{-2,2,6\}$ czy $x=-2$ lub $x=2$ lub $x=6$ czy też „równanie spełniają liczby -2, 2,6”	1

Zadanie 5. *(3 pkt)*

Cenę telewizora obniżono w styczniu o 10%, a następnie w lutym o 140 złotych. Po obu obniżkach telewizor kosztował 1300 złotych. Oblicz cenę telewizora przed obiema obniżkami.

Rozwiązanie

Niech x będzie ceną telewizora przed obniżkami. Wówczas cena telewizora po pierwszej obniżce będzie równa:

$x-10\%\cdot x=x-0{,}1x=0{,}9x$

Cena telewizora po następnej obniżce o 140 zł wynosi $0{,}9x-140$. Stąd dostajemy równanie $0{,}9x-140=1300$, które rozwiązujemy.

$0{,}9x=1300+140$

$0{,}9x=1440$

$9x=14400$

$x=14400:9$

$x=1600$

Odpowiedź: Cena telewizora przed obniżkami wynosiła 1600 zł.

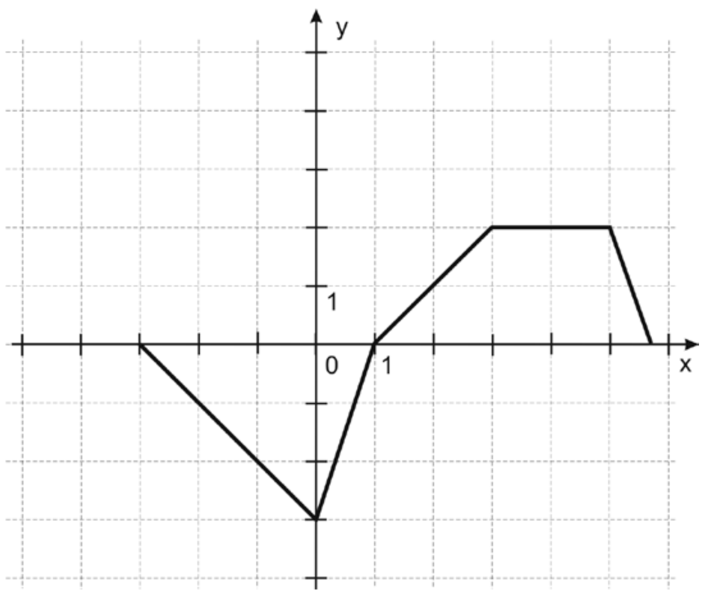
Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
5.	5.1	II.3)a)	rozwiązuje zadanie tekstowe prowadzące do obliczeń procentowych	Zapisanie ceny telewizora po pierwszej obniżce, np. $0,9x$, gdzie x jest ceną początkową telewizora.	1
	5.2			Zapisanie ceny po drugiej obniżce i ułożenie równania: $0,9x-140=1300$.	1
	5.3			Rozwiązanie równania: $x=1600$.	1

II Funkcje

Zadanie 6. (*3 pkt.*)

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Na podstawie tego wykresu:

a) podaj liczbę miejsc zerowych funkcji *f*,

b) zapisz maksymalny przedział, w którym funkcja *f* jest rosnąca,

c) rozwiąż nierówność $f(x)<0$.

Rozwiązanie

a) Zadanie sprawdza umiejętność odczytywania własności funkcji z wykresu. W tym podpunkcie przypominamy sobie, że geometrycznie miejsca zerowe znajdujemy w przecięciu wykresu funkcji z osią OX. Stąd natychmiastowa odpowiedź – mamy 3 miejsca zerowe.

b) Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdy dla $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ i $x_1 > x_2$ $zachodzi$ $f(x_1) > f(x_2)$, czyli wraz ze wzrostem argumentów w tym przedziale rosną wartości funkcji. Odpowiedź – funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$.

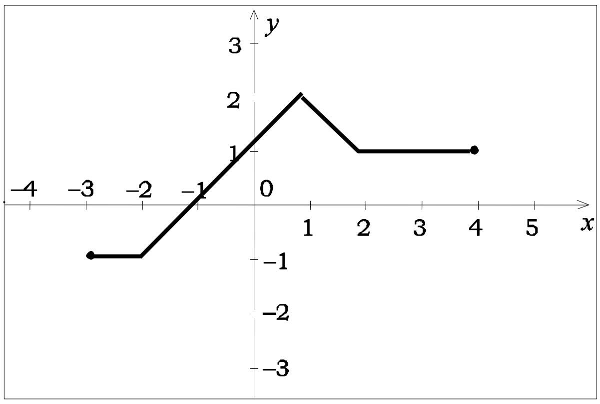
c) Rozwiązanie nierówności także odczytujemy z wykresu – są to te x, dla których wykres jest pod osią OX, czyli $x \in (-3, 1)$.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
6.	6.1	II.4)e)	odczytuje własności funkcji na podstawie jej wykresu	Zapisanie liczby miejsc zerowych funkcji f: 3	1
	6.2			Zapisanie maksymalnego przedziału, w którym funkcja f jest rosnąca: $\langle 0, 3 \rangle$	1
	6.3			Zapisanie rozwiązania nierówności $f(x) < 0$ dla $x \in (-3, 1)$.	1

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Dziedziną funkcji przedstawionej na wykresie jest



A. $\langle -3, 4 \rangle$

B. $\langle -3, 0) \cup (0, 4 \rangle$

C. $\langle -1, 2 \rangle$

D. $(-2, 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$

Rozwiązanie

Zadanie na odczytywanie dziedziny funkcji z wykresu. Dziedzinę odczytujemy rzutując prostopadle wykres na oś OX, w tym wypadku jest to przedział $\langle -3, 4 \rangle$ - odpowiedź A.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
7.	6.1	II.4)e)	odczytuje własności funkcji na podstawie jej wykresu	Zapisanie dziedziny funkcji f.	1

Zadanie 8. *(3 pkt)*

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

I sposób

Wzór funkcji kwadratowej możemy zapisać w trzech postaciach:

- ogólnej, tzn. $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c to współczynniki.
- kanonicznej, tzn. $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a to współczynnik, (p, q) to współrzędne wierzchołka paraboli, $p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a}$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$.
- iloczynowej, tzn. $dla\ \Delta > 0, f(x) = a(x-x_1)(x-x_2), dla\ \Delta = 0, f(x) = a(x-x_0)^2$, $dla\ \Delta < 0$ postać iloczynowa nie istnieje.

Mamy podaną postać ogólną funkcji kwadratowej, gdzie $a = 2, b = -1, c = 1$, musimy obliczyć Δ, p, q i podstawić odpowiednie wielkości do wzoru $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$

$p = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}, q = \frac{-(-7)}{4 \cdot 2} = \frac{7}{8}.$

Podstawiamy do wzoru

$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$

Ogólnie w większości zadań na rozwiązywanie równań kwadratowych, czy też dotyczących funkcji kwadratowej, ważne jest, aby wypisać wartości a, b, c, a następnie podstawić je do odpowiednich wzorów, zwracając uwagę na znaki liczb!

II sposób

Przekształcamy tak długo wyrażenie $2x^2 - x + 1$, aż zapiszemy je w postaci kanonicznej:

$2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 1 = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2}{16} + 1 =$

$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$.

Korzystaliśmy z wyłączania wspólnego czynnika poza nawias i wzorów skróconego mnożenia. Oczywiście, mimo że w schemacie oceniania nie jest przewidziane takie postępowanie, za to rozwiązanie egzaminatorzy przyznają maksymalną liczbę punktów.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
8.	8.1	I.4	zapisuje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej	Wyznaczenie *p*: $p = \frac{1}{4}$.	1
	8.2			Wyznaczenie *q*: $q = \frac{7}{8}$.	1
	8.3			Zapisanie wzoru w postaci kanonicznej: $y = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$.	1

III Ciągi

Zadanie 9. ***(4 pkt)***

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 4n + 5$, dla $n = 1, 2, 3...$. Oblicz

a) pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

b) sumę trzydziestu pierwszych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

a) Obliczamy pierwszy wyraz ciągu (a_n), czyli wstawiamy w miejsce n jedynkę: $n = 1$.

$a_1 = 4 \cdot 1 + 5 = 4 + 5 = 9$.

Aby obliczyć różnicę tego ciągu wystarczy obliczyć jego drugi wyraz a_2, wstawiając w miejsce n dwójkę: $n = 2$, a następnie obliczyć różnicę $r = a_2 - a_1$,

$a_2 = 4 \cdot 2 + 5 = 8 + 5 = 13,$

$r = 13 - 9 = 4$

b) Aby obliczyć sumę trzydziestu pierwszych wyrazów tego ciągu, korzystamy ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Obliczenia robimy dla $n = 30$

$a_{30} = 4 \cdot 30 + 5 = 120 + 5 = 125$

$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{9 + 125}{2} \cdot 30 = \frac{134}{2} \cdot 30 = 67 \cdot 30 = 2010$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
9.	9.1	II.2	stosuje wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego do obliczenia wyrazu pierwszego i różnicy	Obliczenie pierwszego wyrazu ciągu (a_n): $a_1 = 9$.	1
	9.2			Obliczenie różnicy ciągu (a_n): $r = 4$.	1
	9.3		stosuje wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	Obliczenie a_{30} do wykorzystania we wzorze na sumę 30-tu wyrazów ciągu arytmetycznego (S_{30}).	1
	9.4		oblicza sumę wyrazów ciągu	Obliczenie sumy $S_{30} = 2010$.	1

Zadanie 10. *(4 pkt)*

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_2 = 5$, $a_5 = 14$.

a) Oblicz różnicę i pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Wyznacz wzór na *n*-ty wyraz tego ciągu.

c) Oblicz sumę dziesięciu kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10}$

Rozwiązanie

a) Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)r$, stąd

$a_2 = a_1 + (2-1)r = a_1 + r$

$a_5 = a_1 + (5-1)r = a_1 + 4r$

Układamy układ równań z dwiema niewiadomymi $a_1 i\, r$.

$$\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ a_1 + 4r = 14 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań np. metodą przeciwnych współczynników (inaczej dodawania stronami).

$$\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ -a_1 - 4r = -14 \end{cases}$$

$$-3r = -9$$

$$r = 3$$

$$\begin{cases} r = 3 \\ a_1 + r = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 3 \\ a_1 + 3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Zamiast układać i rozwiązywać układ równań, możemy skorzystać z zależności $a_5 - a_2 = 3r$.

Wówczas $3r = 14 - 5 = 9, r = 3$.

b) Ponownie korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)r$, wstawiając obliczone wartości a_1 i r.

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$, wzór na n-ty wyraz $a_n = 3n - 1$.

c) Aby obliczyć sumę dziesięciu kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu, korzystamy ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Obliczenia robimy dla $n = 10$.

$a_{10} = 3 \cdot 10 - 1 = 30 - 1 = 29$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2 + 29}{2} \cdot 10 = \frac{31}{2} \cdot 10 = 31 \cdot 5 = 155$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
10.	10.1	II.2 I.3 I.5	stosuje wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego do obliczenia wyrazu pierwszego i różnicy zna algorytmy potrzebne do rozwiązywania układów równań.	Zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć różnicę i pierwszy wyraz ciągu: $\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ a_1 + 4r = 14 \end{cases}$. Zamiast układu równań może to być zapisanie zależności $a_5 - a_2 = 3r$.	1
	10.2			Obliczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n): $a_1 = 2. r = 3$	1
	10.3	II.2	stosuje wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego	Wyznaczenie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu: $a_n = 3n - 1$.	1
	10.4		oblicza sumę wyrazów ciągu	Obliczenie sumy dziesięciu kolejnych wyrazów ciągu (a_n): $S_{10} = 155$.	1

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = 8$ i $q = \frac{1}{2}$. Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) i sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obliczamy 10-ty wyraz ciągu

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2^3 \cdot 2^{-9} = 2^{3-9} = 2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ dla\ q \neq 1$

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{8 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot \frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{4} : \frac{1}{2} = \frac{31}{4} \cdot 2 = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
11.	11.1	II.2	posługuje się wzorami dotyczącymi ciągu geometrycznego do rozwiązania problemu matematycznego	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu w postaci np.: $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.	1
	11.2			Obliczenie dziesiątego wyrazu ciągu: $a_{10} = \frac{1}{64}$.	1
	11.3			Obliczenie sumy pięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_5 = 15\frac{1}{2}$.	1

IV Geometria

Zadanie 12. *(1 pkt)*

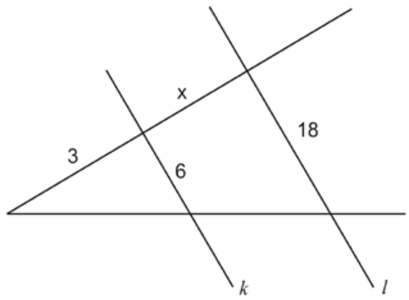
Z faktu, że proste *k* i *l* są równoległe wynika, że odcinek *x* ma długość

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12



Rozwiązanie

Typowe zadanie na zastosowanie podobieństwa trójkątów, z którego w oczywisty sposób otrzymujemy proporcję

$$\frac{18}{x+3} = \frac{6}{3},$$

$\frac{18}{x+3} = 2,$ z własności proporcji otrzymujemy proste równanie

$$2(x+3) = 18 \; czyli \; x+3 = 9, więc \; x = 6$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
12.	12.1	I.6	stosuje własności figur podobnych (lub twierdzenie Talesa)	jak wyżej	1

Zadanie 13. *(1 pkt)*

Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny w skali 2 do prostokąta $ABCD$, którego pole jest równe 1,2 cm^2. Pole prostokąta $A'B'C'D'$ jest równe

A. $1,44\ \mathrm{cm}^2$

B. $2,4\ \mathrm{cm}^2$

C. $4,8\ \mathrm{cm}^2$

D. $1,2\ \mathrm{cm}^2$

Rozwiązanie

Przypominamy sobie, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, czyli prostokąt $A'B'C'D'$ ma pole 4 razy większe niż prostokąt $ABCD$, $1{,}2 \cdot 4 = 4{,}8\ (cm^2)$. Poprawna jest więc odpowiedź C.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
13.	13.1	I.6	stosuje własności figur podobnych	jak wyżej	1

Zadanie 14. (*4 pkt.*)

Punkty $A = (-3,-2), B = (0,2), C = (6,-6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Napisz równanie prostej zawierającej bok AB i oblicz obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie

Najprościej znaleźć równanie prostej AB wykorzystując wzór na równanie prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, czyli $y - (-2) = \frac{2-(-2)}{0-(-3)}\big(x - (-3)\big)$

$$y + 2 = \frac{2+2}{3}(x+3)$$

$$y = \frac{4}{3}(x+3) - 2$$

$$y = \frac{4}{3}x + 4 - 2$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2$$

Aby obliczyć obwód trójkąta ABC, musimy obliczyć długości jego boków AB, AC, BC. Korzystamy ze wzoru na długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ czyli

$$|AB| = \sqrt{\big(0-(-3)\big)^2 + \big(2-(-2)\big)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|AC| = \sqrt{\big(6-(-3)\big)^2 + \big(-6-(-2)\big)^2} = \sqrt{9^2 + (-4)^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$$

$$|BC| = \sqrt{(6-0)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$Obwód_{\Delta ABC} = |AB| + |AC| + |BC| = 5 + \sqrt{97} + 10 = 15 + \sqrt{97}$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
14.	14.1	II.2	wyznacza równanie prostej	Wyznaczenie równania prostej AB: $y=\frac{4}{3}x+2$.	1
	14.2		oblicza odległość dwóch punktów	Prawidłowe obliczenie długości trzech boków – 2 pkt. Prawidłowe obliczenie długości jednego lub dwóch boków – 1 pkt.	2
	14.3		oblicza obwód trójkąta	Obliczenie obwodu trójkąta ABC: $Obwód_{\Delta ABC} = 15+\sqrt{97}$	1

Zadanie 15. (*5 pkt.*)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna $\boldsymbol{b=10}$ jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\boldsymbol{\beta=45^\circ}$. Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi α. Sporządź rysunek pomocniczy. Oblicz:

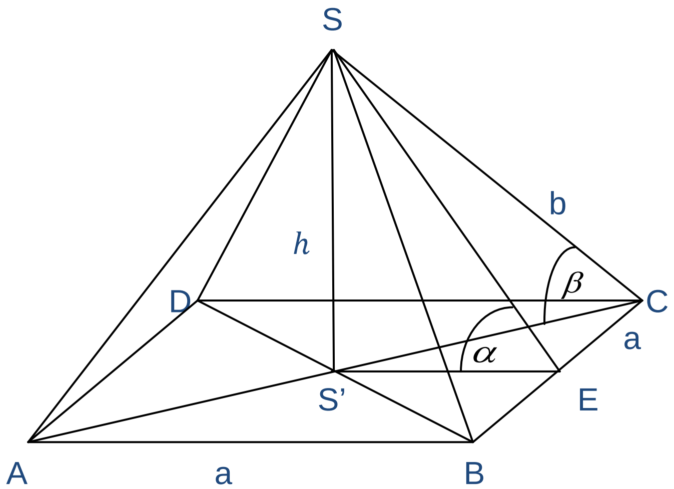
a) objętość *V* tego ostrosłupa.

b) tangens kąta α.

Rozwiązanie

We wszystkich zadaniach ze stereometrii zasadniczą rolę odgrywa tzw. rysunek pomocniczy. Na nim zaznaczamy wielkości, które znamy, jak również te, które musimy obliczyć. Bardzo ważna jest dobra analiza zadania, szczególnie, gdy jest wiele rzeczy do zrobienia. Proponuję wykonanie tej analizy zgodnie z zamieszczonym poniżej schematem.

1. Rysunek pomocniczy



2. Dane

   $b = 10$

   $\beta = 45°$

3. Szukane zasadnicze

   $V = ?$ $\qquad V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$

   $tg\,\alpha = ?$ $\qquad tg\,\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

4. Szukane pomocnicze

   $a = ?$

   $h = ?$

5. Rozwiązanie

Zadanie sprowadza się do obliczenia wielkości a i h. Szukamy na rysunku trójkątów prostokątnych, które możemy rozwiązać i tym samym obliczyć brakujące wielkości. Z $\Delta SS'C$ i funkcji trygonometrycznych możemy obliczyć a i h.

$\sin\beta = \frac{h}{b}$, czyli $\sin 45° = \frac{h}{10}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{10}$, $2h = 10\sqrt{2}$, $h = 5\sqrt{2}$

$|S'C| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (połowa przekątnej kwadratu o boku a), czyli $\cos 45° = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{10}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{10}$,

$a\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, $a = 10$

Wielkości a i h mogliśmy także obliczyć inaczej. Z warunków zadania wynika, że $\Delta SS'C$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, gdzie b jest jego przeciwprostokątną. Wówczas $h = |S'C| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $b = h\sqrt{2}$, $b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}$, $b = a$, czyli $a = 10$, $h = 5\sqrt{2}$.

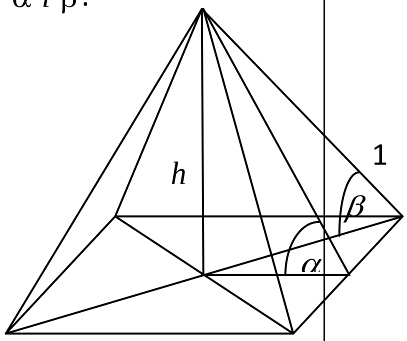
W tym momencie pozostało nam tylko podstawienie obliczonych wielkości do wzoru na objętość ostrosłupa i $tg\,\alpha$.

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{2} = \frac{500\sqrt{2}}{3}$$

$$tg\,\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$$

Odpowiedź. Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{500\sqrt{2}}{3}\,j^3$, $tg\,\alpha = \sqrt{2}$.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
15.	15.1	I.6)d)	wskazuje kąt dwuścienny oraz kąt między prostą a płaszczyzną na rysunku	Sporządzenie rysunku i zaznaczenie kątów α *i* β.  	1
	15.2	II.3)c)	wykorzystuje związki miarowe w ostrosłupie do obliczenia długości odpowiednich odcinków	Obliczenie wysokości ostrosłupa *h*: $h = 5\sqrt{2}$.	1
	15.3			Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa *a*: $a = 10$ lub długości przekątnej podstawy *d*: $d = 10\sqrt{2}$.	1
	15.4	II.4)f)	oblicza objętość ostrosłupa	Obliczenie objętości ostrosłupa *V*: $V = \frac{500\sqrt{2}}{3}$.	1
	15.5		wyznacza wartość funkcji trygonometrycznej kąta ostrego	Obliczenie tangensa kąta α: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.	1

Zadanie 16. (*3 pkt.*)

Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$, wiedząc że $\operatorname{tg}\alpha = 2$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Rozwiązanie

Zadanie na związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, czyli tzw. jedynka trygonometryczna oraz $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$. Z drugiej równości wynika, że $2 = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, więc $sin\alpha = 2cos\alpha$. Wstawiając w miejsce $sin\alpha$ w jedynce trygonometrycznej $2cos\alpha$, otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą $cos\alpha$.

$(2cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1$

$4cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$5cos^2\alpha = 1$

$cos^2\alpha = \frac{1}{5}.$

Ponieważ kąt α jest kątem ostrym, to w rozwiązaniu równania kwadratowego z niewiadomą $cos\alpha$ bierzemy pod uwagę jego rozwiązanie dodatnie

$$cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Przekształcamy $\sqrt{\frac{1}{5}}$ usuwając niewymierność z mianownika:

$$\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

stąd

$cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, sin\alpha = 2cos\alpha, sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Obliczone wartości wstawiamy do wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha + tg\alpha.$

$$sin\alpha \cdot cos\alpha + tg\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} + 2 = \frac{2}{5} + 2 = 2\frac{2}{5}$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
16.	16.1	II.2	wykorzystuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do wyznaczenia wartości wyrażenia trygonometrycznego	Wykorzystanie związku $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ do zapisania zależności np.: $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.	1
	16.2			Wykorzystanie związku $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ do wyznaczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$	1
	16.3			Wyznaczenie $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i obliczenie wartości wyrażenia: $2\frac{2}{5}$ lub $2,4$.	1

V Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

W wielu zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa przede wszystkim musimy wypisać elementy zbioru zdarzeń elementarnych Ω i obliczyć moc tego zbioru. Przy małej liczbie zdarzeń elementarnych wypisanie ich wszystkich nie stanowi problemu, łatwo wówczas wypisać zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeń A, B, C, …, obliczyć ich moce i prawdopodobieństwa. Przy większej liczbie zdarzeń elementarnych musimy korzystać z kombinatoryki. Wybieramy spośród czterech możliwości – są to: kombinacje bez powtórzeń, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami i permutacje. Często trudno podjąć decyzję w sprawie wyboru właściwego sposobu obliczeń, wówczas możemy zastosować poniższy algorytm, w którym k jest liczbą losowanych elementów, a n to liczba wszystkich elementów w danym zbiorze (z nich losujemy).

Czy istotna jest kolejność losowanych elementów?

TAK

Czy elementy mogą się powtarzać?

TAK

Wariacje z powtórzeniami, typowe losowanie ze zwracaniem $W_n^k = n^k$

NIE

Czy losujemy wszystkie elementy?

TAK

$k = n$ Permutacje bez powtórzeń $P_n = n!$

NIE

$k < n$ Wariacje bez powtórzeń, typowe losowanie bez zwracania $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

NIE

Kombinacje bez powtórzeń, losujemy k elementów z n, oczywiście $k \le n$. $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Zadanie 17. (*4 pkt.*)

Ze zbioru liczb $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania.

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą,

B – wśród wylosowanych liczb jest liczba 4,

C – mniejszą z wylosowanych liczb jest liczba 4.

Rozwiązanie

I sposób

Jest to losowanie bez zwracania, do obliczenia mocy zbioru Ω stosujemy wzór $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $k = 2, n = 5$ czyli:

$$|\Omega| = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$$

$|\Omega| -$ jest to jeden ze sposobu zapisu mocy zbioru, czyli – przy zbiorach skończonych – liczby elementów tego zbioru; inny zapis oznaczający moc zbioru $\Omega\ to\ \bar{\bar{\Omega}}$.

Aby obliczyć moc zbioru A zwracamy uwagę na fakt, ze iloczyn dwóch liczb będzie liczbą nieparzystą gdy dwie wylosowane liczby będą nieparzyste, czyli pierwszą liczbę możemy wylosować na dwa sposoby (dwie liczby nieparzyste w zbiorze) a drugą na jeden sposób (bo jest to losowanie bez zwracania).

$$|A| = 2 \cdot 1 = 2$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia obliczamy korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Obliczamy moc zbioru B, liczbę 4 możemy wylosować na dwa sposoby, jako pierwszą z wylosowanych liczb lub jako drugą. Pozostałe liczby możemy wybrać na cztery sposoby, czyli:

$$|B| = 2 \cdot 4 = 8$$

$$P(B) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Podobnie obliczamy moc zbioru C, liczbę 4 możemy wylosować na dwa sposoby, jako pierwszą z wylosowanych liczb lub jako drugą. Pozostałe dwie liczby większe od 4, czyli 5 lub 6, możemy wybrać na dwa sposoby, stąd:

$$|C| = 2 \cdot 2 = 4$$

$$P(C) = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

II sposób

Wypisujemy wszystkie elementy zbioru Ω (wszystkie zdarzenia elementarne).

$$\Omega = \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

Jest ich 20, stąd $|\Omega| = 20$

Wypisujemy zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeń *A, B, C,* zapisujemy moce zbiorów *A, B, C* (czyli liczbę elementów tych zbiorów) i obliczamy ich prawdopodobieństwa według definicji klasycznej prawdopodobieństwa.

$A = \{(3,5),(5,3)\}$

$|A| = 2$

$P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$B = \{(2,4),(3,4),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$

$|B| = 8$

$P(B) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$C = \{(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$

$|C| = 4$

$P(C) = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
17.	17.1	I.7)b) II.4)g)	zlicza obiekty w prostej sytuacji kombinatorycznej oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia wg definicji klasycznej	Zapisanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 5 \cdot 4$.	1
	17.2			Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia *A* i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*: $\lvert A\rvert = 2,\quad P(A) = \frac{1}{10}$	1
	17.3			Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia *B* i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *B*: $\lvert B\rvert = 8,\quad P(B) = \frac{2}{5}$.	1
	17.4			Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia *C* i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *C*: $\lvert C\rvert = 4,\quad P(C) = \frac{1}{5}$.	1

Zadanie 18. *(3 pkt)*

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w każdym rzucie liczby oczek podzielnej przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie

Ω- dwuelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru sześciocioelementowego,

$k = 2, n = 6, W_n^k = n^k,$

$|\Omega| = W_6^2 = 6^2 = 36$

A - otrzymanie w każdym rzucie liczby oczek podzielnej przez 3, dwuelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru dwuelementowego (wybieramy dwie liczby z liczb 3 i 6).

$|A| = W_2^2 = 2^2 = 4$

Z definicji klasycznej prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
18.	18.1	I.7)b) II.4)g)	zlicza obiekty w prostej sytuacji kombinatorycznej	Obliczenie mocy zbioru Ω: $\|\Omega\| = 36$	1
	18.2			Obliczenie mocy zdarzenia A: $\|A\| = 4$	1
	18.3		oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia wg definicji klasycznej	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{1}{9}$	1

Zadanie 19. (*1 pkt.*)

Wykonano 11 rzutów kostką do gry i otrzymano, po uporządkowaniu, następujące liczby oczek: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6. Mediana uzyskanych wyników wynosi

A. 1
B. $\frac{3}{2}$
C. 3
D. $\frac{5}{2}$

Rozwiązanie

Korzystamy z definicji mediany – dla nieparzystej liczby uporządkowanych wyrazów ciągu jest to wyraz środkowy ,czyli 3 (odpowiedź C).

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
13.	13.1	I.7)a)	wyznacza medianę podanych wyników	jak wyżej	1

VI Różne

Zadanie 20. *(5 pkt)*

W tabeli zapisano pięć zdań. Wpisz w wolną rubrykę literę P, jeżeli uważasz, że zdanie jest prawdziwe, albo literę F, jeśli uznasz zdanie za fałszywe.

L.p.	Zdanie	P / F
1.	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$	
2.	Układ równań $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ jest układem równań sprzecznych.	
3.	$3^{-1}\cdot\sqrt{3}=3^{-0,5}$	
4.	Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=n+1$ jest arytmetyczny.	
5.	Funkcja $g(x)=\sqrt{3}x-2$ jest funkcją malejącą.	

Rozwiązanie

Zadania tego typu nie wymagają pracochłonnych obliczeń, najlepiej przyjrzeć się uważnie przykładowi i skorzystać ze swojej wiedzy na temat, którego dotyczy zadanie.

1. Najprościej przekształcić równość, korzystając z własności proporcji. Proporcję $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ możemy zapisać w postaci $a\cdot d=b\cdot c$ (iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów środkowych). Natychmiast dostajemy równość prawdziwą:

   $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1,$ to jest to samo, co $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}$. Stąd:

   $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$

   $2-1=1$

   $1=1$,

   Możemy także usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, czyli:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

Zdanie prawdziwe

2. Podany układ równań nie jest układem sprzecznym, nie trzeba go rozwiązywać, aby zauważyć ten fakt. Byłby sprzeczny, gdyby drugie równanie powstało przez pomnożenie obu stron pierwszego równania przez tę samą liczbę różną od 0, a następnie zmieniono by wyraz wolny. Jednym słowem współczynniki przy x i y byłyby takie same. Natomiast rozwiązując układ równań doszlibyśmy do sprzeczności:

$$\begin{cases} x+y=5 \quad /\cdot(-2) \\ 2x+3y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-2y=-10 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$$

$$y=-2$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ x=7 \end{cases}$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zdanie fałszywe.

3. Wystarczy pamiętać, że $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ oraz fakt, że mnożąc potęgi o tej samej podstawie dodajemy ich wykładniki. Zdanie prawdziwe.

4. Wystarczy wiedzieć, że ciąg określony wzorem takiej postaci jak funkcja liniowa jest ciągiem arytmetycznym. Oczywiście można sprawdzić, czy jest to ciąg o stałej różnicy, zgodnie z definicją ciągu arytmetycznego. Wówczas $a_{n+1} - a_n = r$. Czyli:

$$a_{n+1} = n+1+1 = n+2$$

$$a_{n+1} - a_n = n+2-(n+1) = n+2-n-1 = 1$$

$$r = 1$$

Ciąg jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 1$. Zdanie prawdziwe.

5. Funkcja liniowa jest funkcją malejącą, gdy współczynnik $a < 0$. We wzorze funkcji $g(x)$ współczynnik $a = \sqrt{3}$. Zdanie fałszywe.

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Rozwiązanie zadania	Liczba punktów
20.	20.1	I.1	stosuje własności proporcji lub usuwa niewymierność z mianownika	P	1
	20.2	I.3	np. rozwiązuje układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi	F	1
	20.3	I.1	wykonuje działania na potęgach	P	1
	20.4	I.5	sprawdza, czy ciąg jest arytmetyczny	P	1
	20.5	I.4	stosuje własności funkcji liniowej	F	1

Zadanie 21. ***(4 pkt)***

Wśród uczniów pewnej klasy przeprowadzono ankietę pytając, ile czasu codziennie, poza lekcjami wychowania fizycznego, przeznaczają na uprawianie sportu. Wyniki ankiety przedstawiono w tabeli.

Czas (w minutach)	0	30	60	90	120
Liczba uczniów	6	5	10	3	6

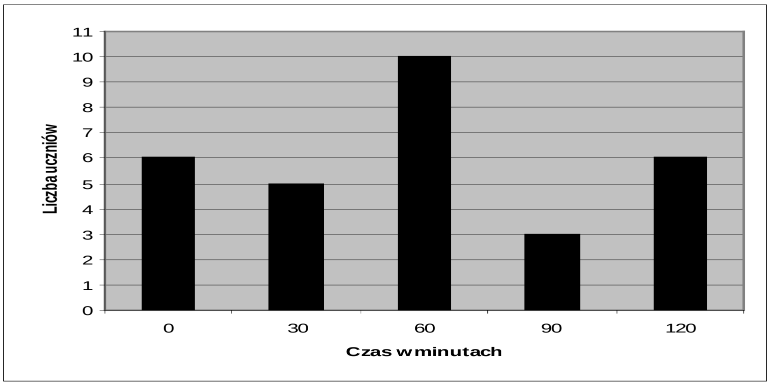
a) Narysuj diagram słupkowy przedstawiający wyniki ankiety.

b) Oblicz średnią liczbę minut, jaką uczniowie przeznaczają codziennie na uprawianie sportu.

c) Zapisz w procentach, ilu spośród ankietowanych uczniów nie uprawia wcale sportu.

Rozwiązanie

a) Rysując diagram słupkowy ,musimy pamiętać o dobrym opisie osi poziomej i pionowej! Na osi poziomej zaznaczamy czas w minutach, a na osi pionowej liczbę uczniów. Przykładowy diagram wygląda tak:



b) Średnią liczbę minut, jaką uczniowie przeznaczają codziennie na uprawianie sportu, obliczamy ze wzoru na średnią arytmetyczną: $\frac{0\cdot6+30\cdot5+60\cdot10+90\cdot3+120\cdot6}{6+5+10+3+6} = \frac{150+600+270+720}{30} = \frac{1740}{30} = \frac{174}{3} = 58$

c) Sportu nie uprawia sześciu uczniów z 30, co stanowi $\frac{6}{30}$ wszystkich uczniów. Upraszczamy ułamek $\frac{6}{30}$, skracając go przez 6, co daje $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ zamieniamy na procent, mnożąc ułamek przez 100%.

$$\frac{1}{5}\cdot 100\% = \frac{100}{5}\% = 20\%.$$

Schemat punktowania

Nr zadania	Nr czynności	Nr standardu	Sprawdzana umiejętność *Zdający:*	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
21.	21.1	I.7	wykonuje ilustrację graficzną zbioru danych /diagram słupkowy/	Narysowanie diagramu słupkowego z opisem osi. 	1
	21.2	II.4)a)	oblicza średnią arytmetyczną	Zapisanie metody obliczenia średniej liczby przeznaczanej na uprawianie sportu: $\frac{0\cdot6+30\cdot5+60\cdot10+90\cdot3+120\cdot6}{6+5+10+3+6}$	1
	21.3			Obliczenie średniej liczby minut przeznaczanej na uprawianie sportu: 58 minut.	1
	21.4	I.1	oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba	Obliczenie, jaki procent stanowią uczniowie, którzy nie uprawiają sportu: 20%.	1